

Lorenzin attraktori

Lassi Miinalainen, 1928453
lasmii@nikita.tnnet.fi

8.2.2014

Sisältö

1 Kohti Lorenzin mallia	3
1.1 Fluidi ja sen virtaukset	4
1.1.1 Navier-Stokesin yhtälö	6
1.1.2 Muut tarvittavat yhtälöt	10
1.2 Saltzmanin konvektiomalli	10
1.3 Lorenzin mallin johtaminen	13
1.4 Kriittinen Rayleighin luku	16
1.5 Eräitä vaihtoehtoisia Lorenzin mallin tulkintoja	18
1.5.1 Vesimylly	18
1.5.2 Laser	20
2 Lorenzin malli dynaamisena systeeminä	22
2.1 Lyapunovin funktio	24
2.2 Outo Attraktori	25
2.3 Lorenzin Attraktori	31
2.4 Fraktaalidimensio	38
2.4.1 Kaplan-Yorken estimaatti	40
2.4.2 Lyapunovin spektrin estimointi	41
2.4.3 Numeeriset tulokset	46
3 Lorenzin attraktorin muodostuminen	50
3.1 Homokliininen bifurkaatio	50
3.2 Hopfin bifurkaatio	52
A Ohjelmistokoodi Lyapunov spektrin laskemiseksi	55

Johdanto Vuonna 1963 Edward Lorenz julkaisi kuuluisimman artikkelinsa, jossa hän esitteli yksinkertaistetun mallin ilmakehän virtauksille. Mallille on esitetty myös useita vaihtoehtoisia sovelluksia, mutta Lorenzin alkuperäinen lähtökohta oli kuvailla konvektiosolujen käyttäytymistä kahden eri lämpötilassa olevan pinnan välissä olevassa fluidissa.

Sopivilla parametrien valinnoilla kaikki tämän kolmen reaalimuuttujan epälineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisukäyrät lähestyvät niin sanottua outoa attraktoria. On tietenkin selvää, että malli ei kuvaa lukuisten yksinkertaistuksien jälkeen enää mitään tosimaailman sääilmiötä, ainakaan tavallisesti tutkituilla parametrivalinnoilla. Tästä huolimatta sen käyttäytyminen on kaoottista, sen attraktori fraktaalinen, eikä yhtälöryhmää voida ratkaista analyttisesti. Miten kaoottisia ja monimutkaisia siis ovatkaan reaalimaailman ilmiöt?

Lorenzin malli on herättänyt kiinnostusta vuosikymmeniä julkaisunsa jälkeen ja tätä kirjoitettaessa alkuperäisellä artikkelilla on 12115 viittausta Google Scholarin mukaan. Lorenzin mallia voidaan tarkastella fluidimallina, esimerkkinä dynaamisesta systeemistä tai fraktaaligeometrian sovelluksena. Sitä voidaan myös käyttää testiongelmaksi testattaessa algoritmien toimintakykyä. Vaikka lähtökohtana ovat tosimaailman ilmiöt, tarkemmin sanoen sään ennustaminen, on lopputuloksena matemaattinen malli, jonka tutkiminen on hedelmällistä etenkin puhtaasti teoreettiselta näkökannalta.

Tämän tutkielman ensimmäisessä luvussa tarkastellaan fluideja yleisesti ja johdetaan ensin Navier-Stokesin yhtälöt ja sitten Lorenzin yhtälöt. Toisessa luvussa Lorenzin systeemiä tarkastellaan dynamiikan näkökulmasta. Oudon attraktorin olemassaoloa perustellaan tila-avaruuden kompaktisuudella ja systeemin herkkyydellä alkuarvojen muutoksille. Sitten esitellään fraktaalidimension käsite attraktorin monimutkaisuuden kuvaamista varten. Lopuksi esitellään algoritmi fraktaalidimension estimoimista varten. Kolmannessa luvussa tutkitaan Lorenzin systeemin käyttäytymisen muutosta bifurkaatio-parametrin kasvaessa.

Luku 1

Kohti Lorenzin mallia

Sysäyksenä Lorenzin mallin löytämiselle oli sään ennustaminen matemaattisesti, sillä Lorenz oli taustaltaan meteorologi. Käytössä oli eräs 12-ulotteinen malli. Erään kerran Lorenz päätti tutkia tarkemmin erästä aiemmin simuloitua tapausta. Differentiaaliyhtälön uudeksi alkuarvoksi hän valitsi aiemmin tulostetusta paperista erään systeemin välitiloista ja yllätyksekseen huomasi, että koneen laskemat ratkaisut erosivat aiemmin lasketuista. Syynä tähän oli, että kone tulosti systeemin tilan paperinauhalle kolmen desimaalin tarkkuudella ja laskenta suoritettiin kuuden desimaalin tarkkuudella. Siis todellisuudessa nämä kaksi alkuarvoa erosivat toisistaan ([14], s. 55). Tätä pienten alkuarvoissa olevien erojen kasvamista ajan kuluessa eksponentiaalisesti kutsutaan systeemin kaoottisuudeksi, sillä nämä erot voivat olla mittaaamattoman pieniä tai jopa koneen laskentatarkkuutta pienempiä. Tällöin inhimillisestä tarkkailijasta systeemi vaikuttaa stokastiselta. Artikkelissaan Lorenz toteaaakin, että säähavaintojen epätarkkuuden ja epätäydellisyyden sekä tietokoneiden rajallisen laskentatarkkuuden vuoksi pitkän aikavälin sään ennustus vaikuttaa käytännössä mahdottomalta ([13], s. 141).

Pitkän aikaa matemaatikot tunsivat vain kahdenlaisia attraktoreita: stabiileja jaksollisia ratoja ja stabiileja tasapainopisteitä. Näin ollen kun systeemissä esiintyi epäjaksollista käytöstä, sen sanottiin olevan satunnainen tai kaoottinen ja sitä mallinnettiin stokastisen matematiikan keinoin. Lorenzin systeemi kuitenkin on kaoottisuudestaan huolimatta deterministinen ja tähän perustuu sen tärkeys kaaosteoriassa ([21], s. 59).

Koska Lorenzin systeemi ei ole analyttisesti ratkeava, joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin. Tämä kuitenkin tarkoittaa, että Lorenzin systeemin epäjaksollisuus ei ole havaittavissa, sillä tietokone sisältää vain rajallisen määrän liukulukuja ja siten jokainen numeerinen ratkaisu on pakotettu enemmän tai myöhemmin sellaiseen faasiavaruuden pisteeseen, jossa se on jo aiemmin käynyt, ja josta eteenpäin systeemi on pakotettu noudattamaan

näin muodostuvaa jaksollista rataa ([13], s. 134).

Nämä käsitteet ja pohdinnat tullaan selvittämään tarkemmin tulevissa osioissa. Aluksi keskitymme johtamaan Lorenzin käyttämän differentiaaliyhtälöryhmän.

1.1 Fluidi ja sen virtaukset

Ymmärtääksemme mitä tarkoitetaan sellaisilla termeillä kuin fluidi ja viskositeetti käymme läpi tarvittavat fluididynamiikan käsitteet. Lähtökohtana on, että on olemassa jokin aikamuuttuja t ja tila-avaruus \mathbb{R}^n (yleensä $n = 3$ tai $n = 2$). Fluidin virtausta voidaan kuvailla matemaattisesti kahdella tavalla.

1. Virtauksen Eulerilainen kuvaus: on olemassa vektorikenttä $\vec{V}(\bar{x}, t)$, joka kuvaa fluidissa vallitsevan virtauksen voimakkuutta ja suuntaa pisteessä \bar{x} hetkellä t . Virtauksen virtauskäyriksi (*streamline*) kutsutaan sellaisia käyriä ψ joiden ylitse ei kulje virtausta jollain ajan hetkellä t' vaan käyrässä olevien fluidin rakenneosien nopeusvektorit ovat virtauskäyrän tangentin suuntaisia. Matemaattisesti tämä ilmaistaan kaksiuotteisen virtauksen tapauksessa

$$v dx - u dy = 0,$$

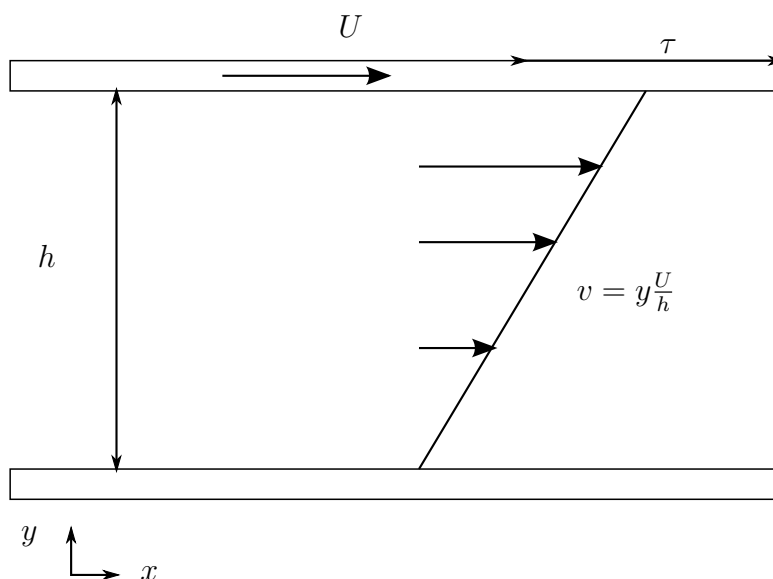
jossa u ja v ovat virtauksen vektorikentän komponentit ja dx ja dy ovat virtauskäyrän differentiaalialkion komponentit ([7], s. 97, 205).

2. Virtauksen Lagrangelainen kuvaus: on olemassa joukko käyriä $\phi_{x_0}(t)$, jotka kuvaavat hetkellä $t = 0$ pisteessä x_0 olleen fluidin rakenneosan liikettä ajan kuluessa. Käyriä, jotka ovat muotoa $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \bar{x} = \phi_{x_0}(t), t \in [-\infty, \infty]\}$, kutsutaan virtauksen paikkakäyriksi (*pathline*).

On syytä huomata, että virtauksen Lagrangelainen kuvaus on sama kuin dynamiikan yleinen määritelmä virtaukselle ja että jos vektorikenttä \vec{V} ei riipu aikamuuttujasta t , niin kunkin pisteen läpi kulkevat paikka- ja virtauskäyrät ovat yhteneviä.

Käsite '*fluidi*' sisältää monia erilaisia aineita. Tavallisesti ajatellaan, että puhutaan kaasusta tai nesteestä, mutta myös esimerkiksi hammastahna on fluidi. Fluidin rakenneosasten (atomien, molekyylien) liike muodostuu stokastisesta lämpöliikkeestä ja systemaattisesta eli deterministisestä osasta. Rakenneosasten törmäykset toisiinsa välittävät fluidin sisällä fluidiin kohdistuvia leikkaus- ja puristusjännityksiä (ja lämpöenergiaa). Fluidin rakenneosasten keskinäisten törmäyksien välillä keskimäärin kulkemaa matkaa nimitetään *keskimääräiseksi vapaaksi matkaksi*. Esimerkiksi ilman tapauksessa

tämä on 0.06 millimetriä ja 'tiheämmin pakatuilla' aineilla vielä pienempi ([16], s. 6). Kun tutkittavat mittakaavat ovat huomattavasti tätä suurempia, voidaan lämpöliikettä käsitellä lämpöenergian näkökulmasta ja lisäksi toisi-aan lähellä olevien rakenneosasten nopeusvektoreiden keskiarvo määrittelee jatkuvan vektorikentän $\vec{V} = (u(\bar{x}), v(\bar{x}), w(\bar{x}))$. Tämä tarkoittaa esimerkiksi, että kaksi vastakkaiseen suuntaan kulkevaa virtausliikettä eivät voi kulkea toistensa lävitse (kuten esimerkiksi yläilmakehän erittäin pienissä tiheyksissä on teoriassa mahdollista).



Kuva 1.1: Couetten virtaus

Kaikille *fluideille* on yhteistä, etteivät ne kannattele leikkausjännityksiä, vaan ne deformoituvat niihin kohdistetun voiman suuntaisesti. Kuvassa 1.1 on kuvattu kahden yhdensuuntaisen levyn välissä oleva fluidikerros sekä siihen syntyvä *Couetten virtaus*. Ylempää levyä vedetään vakionopeudella U . Tämä vaatii tietyn pinta-alaan verrannollisen voiman kohdistamista levyyn. Levyyn ja sen alla olevaan fluidiin kohdistuu siis leikkausjännitys τ . Ylemmän levyn liike aiheuttaa fluidikerrokseen y -koordinaatin suunnassa lineaarisesti muuttuvan virtauksen $v = Uy/h$. Raja-arvoina ovat $v(0) = 0$ ja $v(h) = U$ (eli ns. jäykän reunan raja-arvo). Newtonilaiset fluidit noudattavat Newtonin viskositeettilakia

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy},$$

jossa μ on fluidille ominainen *viskositeetti*. Viskositeetti siis kertoo miten voimakkaasti fluidi vastustaa siihen kohdistuvaa ulkoista deformaatiota ja

fluidin sisäisiä nopeuseroja. Tässä yhteydessä voidaan määritellä myös *kinemaattinen viskositeetti* $\nu = \mu/\rho$, jossa ρ on fluidin tiheys. Kinemaattinen viskositeetti kuvaa fluidiin kohdistetun voiman aiheuttamaa virtauksen muutoksen suuruutta ([16], s. 10).

Puristusjännitystä fluidit vastustavat niin voimakkaasti pienillä jännityksillä, että kokoonpuristuminen voidaan usein jättää huomiotta. Tämä tarkoittaa, että kaikilla avaruuden osa-alueille A pätee, että nettovirtaus niiden rajan yli on nolla. Matemaattisesti tämä ilmaistaan

$$\int_{\partial A} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = 0,$$

jossa \vec{n} on alueesta A pois päin osoittava normaalivektori. Koska edellinen pätee kaikille alueille A , niin divergenssiteoreeman nojalla on pädettyä $\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = 0$ ([16], s. 83). Jos jokin avaruuden suunta on vähemmän tärkeä tutkittavan virtauksen kannalta, se voidaan usein myös jättää huomiotta. Oletetaan esimerkiksi, että virtaus on vakio y -koordinaatin suunnassa (kaksiulotteinen virtaus) tai että virtausnopeus on sama putken kohtisuorien poikileikkauksien kaikissa pisteissä (yksiulotteinen virtaus). Kaksiulotteisen kokoonpuristumattoman virtauksen tapauksessa tämä johtaa luonnollisella tavalla virtafunktion määrittelyyn. Tarkastellaan vektorikenttää

$$\vec{V}(x_1, x_2, t) = (u, v),$$

jolle pätee

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

Nyt on olemassa funktio $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa eksaktin differentiaaliyhtälön

$$d\psi = -v dx_1 + u dx_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2$$

ja jonka avulla virtauksen komponentit u ja v voidaan siis ilmaista. Funktiota ψ kutsutaan virtauksen *virtafunktioksi*. Sen tasa-arvokäyrät $K_c = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \psi(\bar{x}) = c\}$ ovat virtauksen virtauskäyriä ([16], s. 200).

1.1.1 Navier-Stokesin yhtälö

Tarkastelemme pisteessä \bar{x} olevan differentiaalisen fluidialkion liikettä tila-avaruudessa. Olkoot sen sivujen pituudet dx , dy ja dz . Lisäksi oletamme fluidin olevan kokoonpuristumaton. Newtonin liikelaki on

$$\rho \, dx \, dy \, dz \, D_{tt} \bar{x} = \vec{F},$$

jossa D_{tt} on 2. asteen derivaatta ajan suhteen. Yhdistämällä virtauksen Eulerilainen ja Lagrangelainen kuvaus saadaan

$$\begin{aligned} D_{tt} \bar{x} &= D_t \vec{V}(\bar{x}, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i} \\ &:= \frac{D\vec{V}}{Dt} \end{aligned}$$

Termiä $D\vec{V}/Dt$ kutsutaan virtauksen *materiaaliderivaataksi* ([16], s. 84). Materiaaliderivaatta kuvaa fluidielementin jonkin suureen muutosta ajan kuluessa. Se on yleisessä tapauksessa operaattori

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \vec{V}_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

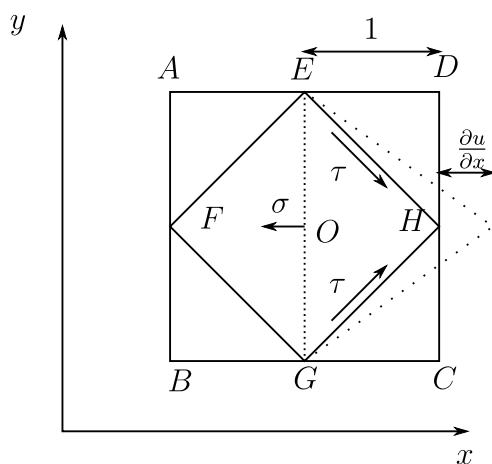
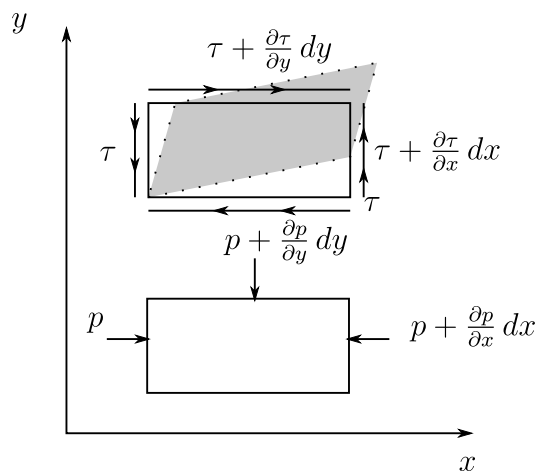
jossa muuttujat V_i ovat nopeuskentän komponentteja.

Fluidialkioon kohdistuva voima \vec{F} voidaan jakaa kenttävoimiin (painovoima, sähkömagneettinen voima), painevoimaan (hydrostaattinen paine) ja viskoosiseen voimaan.

Hyvin usein ainoa fluidissa vaikuttava kenttävoima on painovoima. Differentiaalialkioon vaikuttava painovoima on $\vec{G} = \rho dx dy dz (0, 0, -g)$. Tässä yhteydessä on sopivaa mainita niin sanottu *Poussinesqin approksimaatio*. Tietyissä tilanteissa tiheyden vaihtelut voidaan jättää huomiotta ja tiheyttä ρ voidaan käsitellä vakiona, paitsi niissä yhtälön termeissä, joissa se kerrotaan putoamiskiihtyvyydellä g ([17], s. 532). Navier-Stokesin yhtälöiden tapauksessa tämä tarkoittaa, että fluidin tiheys on vakio muualla paitsi painovoimaa kuvaavassa termissä.

Painevoima ja viskoosinen voima johdetaan tässä vain kaksiulotteiselle virtaukselle. Täysin vastaava tulos kolmiulotteiselle virtaukselle on monimutkaisempi johtaa, eikä sitä tarvita tässä tutkielmassa. Painevoiman tapauksessa kirjoitamme kuvassa 1.2 keskimmäisenä olevan fluidialkion tasopainoyhtälöt molemmille koordinaateille. Ensiksi x -koordinaatin suunnassa lasketaan fluidielementin oikeaan ja vasempaan sivuun kohdistuvien voimien summa, kun voiman positiivinen suunta on oikealle. Jännitysvoima saadaan kertomalla jännityksen suuruus fluidielementin reunan pituudella. Painevoiman x -koordinaatin suuntaiseksi komponentiksi saadaan

$$P_x = p dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy.$$



Kuva 1.2: selventävä kaavio painevoiman ja viskoosisen voiman johtamiseen, Nakayaman mukaan ([16] s. 84)

ja vastaavasti y -koordinaatin suunnassa saadaan tulokseksi

$$P_y = p dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy.$$

Viskoosisen voiman x -akselin suuntainen komponentti kootaan kolmesta osasta: kulma-deformaatiosta johtuva voima S_{x1} , x -akselin suuntaisesta venymästä johtuva voima $\sigma_{x1} dx dy$ ja y -akselin suuntaisesta venymästä johtuva negatiivinen voima $\sigma_{x2} dx dy$. Newtonin viskositeettilain kaksikulotteinen

versio on

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

jossa τ_{yx} on sellainen x -akselin suuntainen leikkausjännitys, jonka vaikutuspinnalle y -akseli on kohtisuorassa. Kuvan 1.2 ylimmän fluidielementin tapauksessa tämä tarkoittaa elementin vaakasuorilla reunoilla vaikuttavia leikkausjännityksiä. Vastaavasti τ_{xy} on fluidielementin pystysuorilla reunoilla vaikuttava leikkausjännitys. Jos fluidi on *isotrooppista*, niin leikkausjännitykset τ_{xy} ja τ_{yx} ovat yhtäsuuria ja voidaan merkitä lyhyesti $\tau_{yx} = \tau$ ([18], s. 81).

Seuraavaksi kirjoitamme tasapainoyhtälön x -akselin suunnassa käyttäen kuvan 1.2 ylintä fluidielementtiä:

$$\begin{aligned} S_{x1} &= -\tau dx + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx = \frac{\partial \tau}{\partial y} dy dx \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dy dx = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dy dx. \end{aligned}$$

Viimeisenä tarkastelemme kuvan 1.2 alinta fluidielementtiä, jonka reunan pituus on 2. Fluidielementin $ABCD$ oikea reuna etääntyy nopeudella $\partial u / \partial x$ keskipisteestä O . Tämä aiheuttaa vinoneliön $EFGH$ neljälle sivulle leikkausjännityksen $\mu \partial u / \partial x = \tau$. Lisäksi suoralla EG vaikuttaa vetojännitys σ . Näille fluidielementin oikean puolikkaan jännityksille pätee tasapainoyhtälö

$$\begin{aligned} 2 \cdot \tau \cos \frac{\pi}{4} \cdot |EH| &= -\sigma \cdot |EG| \\ \sigma &= -\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Sivulla CD vaikuttaa vastaava jännitys, jonka lineaarinen approksimaatio on $\mu(\partial u / \partial x + \partial^2 u / \partial x^2)$. Näiden kahden jännitystilän summana saadaan nettojännitystila $\sigma_{x1} = \mu \partial^2 u / \partial x^2$.

Seuraavaksi ajattelemmme y -akselin suuntaisen venymän aiheuttamia voimatiloja x -akselin suunnassa. Tilanne on muuten samanlainen kuin edellä, mutta y -akselin suuntainen venymä aiheuttaa x -akselin suuntaista kutistumista ja voimat on ovat vastakkaisuuntaisia. Näin ollen saadaan viimeiseksi nettojännitykseksi

$$\sigma_{x2} = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Venymistä aiheutuvat nettovoimat saadaan kertomalla nämä yksikköneliöön kohdistuvat nettojännitykset fluidielementin pinta-alalla $dx dy$. Viskoosinen

voima on siis

$$S = S_{x_1} + S_{x_2} = S_{x_1} + (\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2}) dx dy = \mu \nabla^2 u dx dy.$$

Kokoamalla nyt nämä välitulokset yhteen ja jakamalla saatu vektori yhtälö termillä $dx dy$ saadaan tuloksena Navier-Stokesin yhtälö:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla p_g + \nu \nabla^2 \vec{V}, \quad (1.1)$$

jossa \vec{g} on painovoimavektori (kolmiulotteisessa tapauksessa $(0, 0, -g)$).

1.1.2 Muut tarvittavat yhtälöt

Fluidin rakenneosaset paitsi liikkuvat, myös pyörivät. Tätä rotaatioliikettä kuvataan matemaattisesti *pyörteisyydellä*. Kaksiulotteisen virtauksen pyörteisyys on ([16], s. 49) :

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Derivoimalla Navier-Stokesin yhtälöryhmän ensimmäinen rivi muuttujan y suhteen ja toinen rivi muuttujan x suhteen saadaan näin muodostettujen yhtälöiden erotuksena differentiaaliyhtälö, jonka vasemmalle puolelle tulee termi $\rho D\vec{\omega}/Dt$. Tämä on pyörteisyysyhtälö. Lisäksi voidaan suoraan derivoimalla osoittaa, että jos virtauksella on virtafunktio ψ , niin pätee $\nabla^2 \psi = \vec{\omega}$.

Fluidien tapauksessa tavallinen lämpöyhtälö muuttuu muotoon

$$\frac{DT}{Dt} - \kappa \nabla^2 T = 0, \quad (1.2)$$

jossa κ on fluidin lämmönjohtokerroin. Lämpötilan muutos vaikuttaa fluidin tiheyteen yhtälön $\rho_0 = \rho(1 + \epsilon T)$ mukaisesti, jossa ϵ on fluidin lämpölaajenemiskerroin, ρ_0 on fluidin tiheys jossain sopivassa verrokkilämpötilassa T_0 , ja T on fluidin lämpötilan poikkeama verrokkilämpötilasta, joka on esimerkiksi fluidin keskiarvo ([19], s. 330).

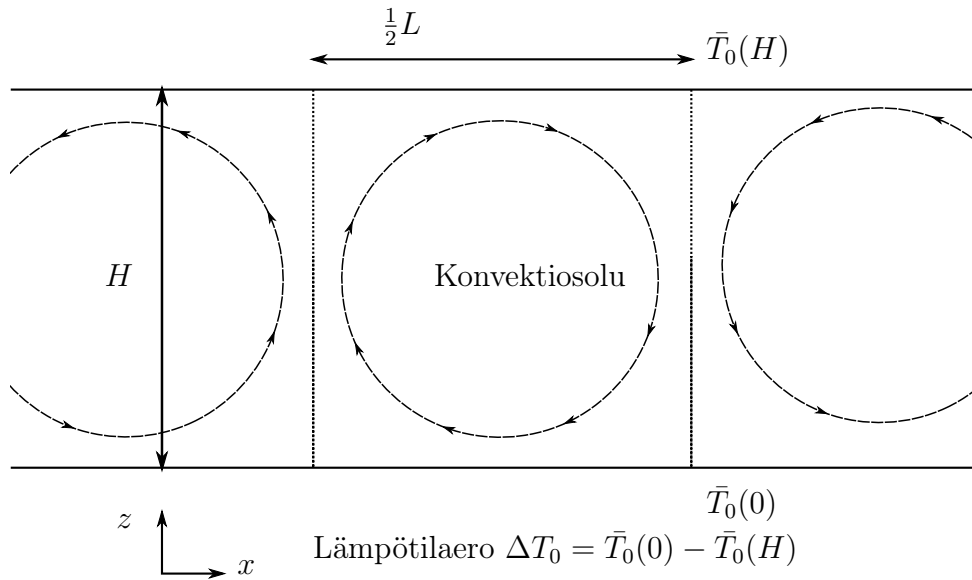
1.2 Saltzmanin konvektiomalli

Tarkastelemme kahden eri lämpötilassa pidetyn massiivisen rakenteen välissä olevan fluidin liikkeitä (ks. kuva 1.3). Merkitään lämpötilaa ylemmällä pinnalla $\bar{T}_0(H)$ ja alemmalla pinnalla $\bar{T}_0(0)$, sekä näiden välistä erotusta ΔT_0 . Lämpötilaeron ja fluidin ominaisuuksien ollessa sopivia lämpötila vaihtelee

z -akselin suunnassa lineaarisesti eikä fluidiin muodostu konvektiovirtauksia. Tällöin lämpö liikkuu nesteessä ensisijaisesti johtumalla. Niin sanotun Rayleighin luvun

$$R = \frac{g\epsilon H^3 \Delta T_0}{\kappa\nu}$$

ylittäessä tietyn kriittisen arvon nesteeseen muodostuu konvektiosoluja ja lämpö liikkuu nesteessä ensisijaisesti nesteen oman virtausliikkeen kautta.



Kuva 1.3: Lorenzin mallin kuvailema systeemi

Aloitamme konvektiovirtauksen differentiaaliyhtälön muodostamisen. Olkoon kyseessä kokoonpuristumaton fluidi. Oletamme Poussinesqin approksimaation pätevän, jolloin lämpötilaeroista johtuvat tiheyserot otetaan huomioon vain putoamiskiihtyvyydellä kerrottaessa. Muutamme kolmiulotteisen tila-avaruuden kaksiulotteiseksi jättämällä y -akselin huomiotta. Muodostamme virtaukselle virtafunktion ψ edellä kuvatulla tavalla. Lisäksi otamme lämpötilajakaumalle käyttöön hajotelman

$$T = \left[\bar{T}_0(0) - \frac{\Delta T_0}{H} z \right] + \theta, \quad (1.3)$$

jossa funktio θ kuvaa lämpötilan poikkeamaa tasapainotilan lineaarisesta lämpötilajakaumasta. Hydrostaattinen paine on $g\rho_0(H - z)$. Navier-Stokesin yhtälö x -koordinaatille on

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u \quad (1.4)$$

ja z -koordinaatille

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial g\rho_0(H - z)}{\partial z} + \nu \nabla^2 w, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\rho_0}{\rho} g + \nu \nabla^2 w, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + (1 + \epsilon T)g + \nu \nabla^2 w, \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g\epsilon T + \nu \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Derivoimalla yhtälö 1.4 muuttujan z suhteen, yhtälö 1.5 muuttujan x suhteen sekä vähentämällä nämä toisistaan saadaan systeemin pyörteisyyisyhtälö

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{\rho_0} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right)}_{=0} + g\epsilon \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \nabla^2 \omega. \quad (1.6)$$

Seuraavaksi sijoitamme hajotelman 1.3 yhtälöön 1.2 ja saamme

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\Delta T_0}{H} w + \kappa \nabla^2 \theta. \quad (1.7)$$

Otamme virtafunktion ψ käyttöön ja sijoittamalla sen ylläolevaan kahteen yhtälöön, joista saamme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi - g\epsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T_0}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \theta &= 0. \end{aligned}$$

Siirrymme dimensiottomiin suureisiin. Teemme seuraavat koordinaatti- ja funktiomuunnokset

$$\begin{aligned} x &= Hx^*, \\ z &= Hz^*, \\ t &= \frac{H^2}{\kappa} t^*, \\ \psi &= \kappa \psi^*, \\ \theta &= \frac{\kappa \nu}{g\epsilon H^3} \theta^*. \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että alamme esimerkiksi laskea pituutta fluidin korkeuden H monikertoina. Tästä seuraa myös, että $\nabla = \nabla^{*2}/H^2$ ja että $\partial/\partial x = \partial/H\partial x^*$. Sijoittamalla nämä muunnokset virtafunktion yhtälöön ja jakamalla lopuksi saatu dimensioton yhtälö vakiolla κ^2/H^4 saamme dimensiottomaksi yhtälöksi

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^{*2} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \nabla^{*2} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \nabla^{*2} \psi^* - \sigma \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} - \sigma \nabla^{*4} \psi^* = 0, \quad (1.8)$$

jossa vakio $\sigma = \nu/\kappa$ on Prandtlin luku. Lämpöfunktion θ^* dimensiottomaksi yhtälöksi saadaan vakiolla $\kappa^2\nu/g\epsilon H^5$ jakamisen jälkeen

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} - R \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \nabla^{*2} \theta^* = 0. \quad (1.9)$$

1.3 Lorenzin mallin johtaminen

Joudumme seuraavaksi valitsemaan reuna-arvot. Saltzman ja Lorenz valitsivat fluidikerroksen molemmat reunat vapaiksi. Tämä tarkoittaa, että

$$\begin{aligned} \theta(z=0) &= \theta(z=H) = 0, \\ \psi(z=0) &= \psi(z=H) = 0, \\ \nabla^2 \psi(z=0) &= \nabla^2 \psi(z=H) = 0. \end{aligned}$$

Nyt voidaan muodostaa funktioiden ψ ja θ Fourier-sarjat

$$\psi(x^*, z^*, t^*) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \Psi(p, q, t^*) \exp i(p a \pi x^* + q \pi z^*), \quad (1.10)$$

$$\theta(x^*, z^*, t^*) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} \Theta(p, q, t^*) \exp i(p a \pi x^* + q \pi z^*), \quad (1.11)$$

jossa parametri a on funktion z - ja x -koordinaattien suuntaisten aallonpituuksien suhdeluku eli $2H/L$. Saltzmanilla tämä on ennen yhtälöryhmän muodostamista kiinnitettävä vakio, Lorenzilla yksi mallin parametreista.

Mallin yksinkertaistamiseksi fluidin virtaukset estetään perusalueen

$$C_a = [0, 1/2L] \times [0, H]$$

pystysuorien seinämien läpi asettamalla funktion ψ Fourier-kertoimet puhtaasti reaaliksi ja funktion θ Fourier-kertoimet puhtaasti kompleksiksi

([19], s. 331, [13], s. 134). Lopputuloksena on, että virtafunktio ψ ja lämpötilafunktio θ voidaan esittää muodossa

$$\psi = \sum_{l,j=1}^{\infty} C_1(l, j, t) \sin l\pi ax^* \sin j\pi z^*,$$

$$\theta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_2(i, j, t) \cos l\pi ax^* \sin j\pi z^*.$$

Emme tästä eteenpäin enää tule tarvitsemaan dimensionallisia koordinaatteja, joten merkitsemme yksinkertaisuuden vuoksi $x^* = x$.

Lorenzin lähestymistapa oli sijoittaa Saltzmanin konvektioyhtälöön yritelmä, joka dimensiottomissa koordinaateissa on

$$\Psi = \frac{1+a^2}{a} X(t) \sin \pi ax \sin \pi z,$$

$$\Theta = \frac{R_c}{\pi} \left(Y(t) \cos \pi ax \sin \pi z - Z(t) \frac{1}{2} \sin 2\pi z \right),$$

jossa $R_c = \pi^4(1+a^2)^3/a^2$ on parametrin a kriittinen Rayleighin luku ([13], s. 135). Muotofunktioista nähdään, että funktio X kuvaa konvektiovirtauksen voimakkuutta. Funktio Y on verrannollinen pohjalle laskeutuvan ja ylöspäin nousevan virran lämpötilaeroon ja funktio Z on verrannollinen pystysuuntaisen lämpötilaprofilin eroon häiritsemättömästä lineaarisesta lämpötilajakaumasta. Nyt funktioiden osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \pi(1+a^2)X \cos \pi ax \sin \pi z, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \pi \frac{1+a^2}{a} X \sin \pi ax \cos \pi z, \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\pi^2(1+a^2)\Psi, \quad (1.14)$$

ja

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{R_c}{\pi} \pi a Y \sin \pi ax \sin \pi z, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{R_c}{\pi} (\pi Y \cos \pi ax \cos \pi z - \pi Z \cos 2\pi z), \quad (1.16)$$

$$\nabla^2 \Theta = \frac{R_c}{\pi} (-\pi^2 Y (1+a^2) \cos \pi ax \sin \pi z + 2\pi^2 Z \sin 2\pi z). \quad (1.17)$$

Sijoittamalla yritelmät dimensiottomiin yhtälöihinsä saamme muodostettua differentiaaliyhtälöt ajasta riippuville funktioille X , Y ja Z . Aloitamme sijoittamis- ja derivointiprosessin sijoittamalla yritelmän Ψ dimensiottomaan yhtälöönsä 1.8. Heti aluksi huomaamme, että yhtälöstä 1.14 seuraa

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Psi = -\pi^2(1+a^2) \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0.$$

Jäljelle jäävälle osalle pätee

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi - \sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \sigma \nabla^4 \Psi &= -\pi^2 \frac{(1+a^2)^2}{a} \dot{X} \sin \pi a x \sin \pi z \\ &\quad + \sigma R_c a Y \sin \pi a x \sin \pi z - \sigma \pi^4 \frac{(1+a^2)^3}{a} X(t) \sin \pi a x \sin \pi z \\ &= \pi^4 \frac{(1+a^2)^3}{a} \sin \pi a x \sin \pi z \left(-\frac{1}{\pi^2(1+a^2)} \dot{X} + \sigma Y - \sigma X \right). \end{aligned}$$

Tekemällä nyt aikamuunnos $\tau = \pi^2(1+a^2)t$ ja asettamalla viimeisellä rivillä sulkeiden sisällä oleva termi nolllaksi saadaan Lorenzin mallin ensimmäinen yhtälö $\dot{X} = \sigma(Y - X)$. Differentiaaliyhtälöt funktioille Y ja Z saadaan vastaavalla tavalla sijoittamalla yrittelmä Θ dimensiottomaan yhtälöönsä 1.9

$$\underbrace{\frac{\partial \Theta}{\partial t}}_{(*)} - \underbrace{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)}_{(**)} - \underbrace{\left(R \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \nabla^2 \Theta \right)}_{(***)} = 0.$$

Kiihtyvyystermi (*) on auki kirjoitettuna

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{R_c}{\pi} \pi^2(1+a^2) \left(\frac{1}{\pi^2(1+a^2)} \dot{Y} \cos \pi a x \sin \pi z - \frac{1}{\pi^2(1+a^2)} \dot{Z} \frac{1}{2} \sin 2\pi z \right),$$

jossa aikaderivaattojen edessä olevat osamäärät tarvitaan ensimmäisessä yhtälössä käytettyyn aikamuunnokseen. Konvektiotermistä (**) saadaan

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \\ &= - \left(\frac{1+a^2}{a} \pi X \sin \pi a x \cos \pi z \right) \left(-\frac{R_c}{\pi} \pi a Y \sin \pi a x \sin \pi z \right) \\ &\quad + (\pi(1+a^2) X \cos \pi a x \sin \pi z) \cdot \frac{R_c}{\pi} (\pi Y \cos \pi a x \cos \pi z - \pi Z \cos 2\pi z) \\ &= \frac{R_c}{\pi} \pi^2(1+a^2) [XY(\cos^2 \pi a x + \sin^2 \pi a x) \underbrace{\cos \pi z \sin \pi z}_{=1/2 \sin 2\pi z}] \\ &\quad - \frac{R_c}{\pi} \pi^2(1+a^2) X Z \cos \pi a x \sin \pi z \cos 2\pi z, \end{aligned}$$

jossa viimeinen trigonometrinen termi $\cos 2\pi z$ korvataan arvollaan tasossa $z = 1/2$ eli $\cos \pi = -1$ tai poistetaan trigonometrisellä kaavalla $\cos 2\pi z =$

$2 \cos^2 \pi z - 1$, josta edelleen trigonometrinen termi jätetään huomiotta lopullisia kaavoja muodostettaessa. Viimeiselle termille (***) saadaan

$$\begin{aligned} -R \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \nabla^2 \Theta \\ = \frac{R_c}{\pi} \pi^2 (1 + a^2) \left(\left(Y - \frac{R}{R_c} X \right) \cos \pi a x \sin \pi z - \frac{4}{1 + a^2} Z \frac{1}{2} \sin 2\pi z \right). \end{aligned}$$

Yhdistämällä nyt nämä kolme termiä, tekemällä vaadittu aikamuunnos, sekä ottamalla vakiot ja trigonometriset termit yhteisiksi tekijöiksi ja asettamalla sulkujen sisällä olevat aikariippuvaisten funktioiden lausekkeet nolliksi saadaan vihdoin Lorenzin yhtälöt

$$\begin{cases} dX/dt = -\sigma X + \sigma Y \\ dY/dt = rX - Y - XZ \\ dZ/dt = XY - bZ \end{cases} \quad (1.18)$$

jossa σ on kuten todettua mallinnetun fluidin Prandtin luku (tavallisesti $\sigma = 10$), parametri r on koeasetelman Rayleighin luvun ja parametrin a kriittisen Rayleighin luvun osamäärä R/R_c , sekä parametri $b = 4/(1 + a^2)$.

1.4 Kriittinen Rayleighin luku

Seuraavaksi on syytä perustella Lorenzin käyttämä yritelmä ja kriittisen Rayleighin luvun lauseke. Olennaisin ero Saltzmanin ja Lorenzin lähestymistapojen välillä oli, että Saltzmanilla fluidin perusalueessa C_a voi virtafunktion Fourier-sarjassa esiintyä useampaa eri spektrin taajuutta samaan aikaan, kun taas Lorenzin mallissa perusalueessa on täsmälleen yksi konvektiosolu. Nähdään, että vain ne aallonpituudet ovat sallittuja konvektiovirtauksen Fourier-sarjassa, joiden kriittinen Rayleighin luku R_c ylittää koeasetelman Rayleighin luvun. Tämä nähdään, kun sijoitetaan funktioiden kompleksiset Fourier-sarjat dimensiottomiin yhtälöihinsä ja linearisoidaan näin saatu ääretönulotteinen yhtälöryhmä origossa.

Funktion ψ kertoimet ovat sovitusti puhtaasti reaalisia, mutta funktiolle θ asetetaan $\Theta(m, n) = 0 - i\Theta(m, n)$. Sijoitamme funktioiden ψ ja θ Fourier-sarjat 1.10 ja 1.11 dimensiottomiin yhtälöihin 1.8 ja 1.9 ja saamme indeksimuunnoksella sekä Lorenzin mallin johtamisessa käytetyllä menetelmällä

yhtälöiksi ([19], s. 332)

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt}(l, j, t) &= \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} \left(a\pi^2(lq - jp) \frac{p^2 a^2 + q^2}{l^2 a^2 + j^2} \Psi(p, q, t) \Psi(l - p, j - q, t) \right) \\ &\quad - \sigma\pi^2(l^2 a^2 + j^2) \Psi(l, j, t) - \frac{\sigma a l}{\pi(l^2 a^2 + j^2)} \Theta(l, j, t), \\ \frac{d\Theta}{dt}(l, j, t) &= - \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} (a\pi^2(lq - jp) \Psi(p, q, t) \Theta(l - p, j - q, t)) \\ &\quad - Ra\pi l \Psi(l, j, t) - \pi^2(l^2 a^2 + j^2) \Theta(l, j, t).\end{aligned}$$

Levossa olevaa fluidia vastaava origopiste $\Psi(l, j) = \Theta(l, j) = 0$ kaikilla l, j on selvästi yhtälöiden tasapainopiste. Yhtälöryhmän Jacobin matriisi origossa voidaan käsittää muuttujien uudelleen järjestelyn jälkeen kvasidiagonaalimatriisina $diag(E_{1,1} \dots E_{l,j})$, jossa osamatriisit $E_{g,h}$ sisältävät spektrikomponentin (g, h) nollasta eroavat neljä derivaattaa. Tähän liittyvää teoriaa tarkastellaan tarkemmin seuraavassa luvussa. Tässä riittää todeta, että pienelle tasapainopisteestä eroavalle häiriölle ovat ne spektrikomponentit (g, h) stabiileja, joille matriisin $E_{g,h}$ kaikkien ominaisarvojen reaaliosa on negatiivinen. Matriisin

$$J_0 E_{g,h} = \begin{pmatrix} -\sigma\pi^2(g^2 a^2 + h^2) & -\frac{\sigma a g}{\pi(g^2 a^2 + h^2)} \\ -Ra\pi g & -\pi^2(g^2 a^2 + h^2) \end{pmatrix}$$

ominaisarvot saadaan karakteristisen polynomin nollakohdista jotka tässä tapauksessa ovat

$$\lambda = \frac{1}{2}\pi^2(g^2 a^2 + h^2) \left[-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma \cdot R / \left(\frac{\pi^4(g^2 a^2 + h^2)^3}{g^2 a^2} \right)} \right].$$

Nähdään että jos Rayleighin luku ylittää suluissa olevan osamäärätermin, niin matriisilla $E_{g,h}$ on positiivisia ominaisarvoja. Lorenzin mallissa konvektiosolut ylsivät fluidin ylärajalta alarajalle, jolloin $h = 1$. Luku ga on tarkasteltavan konvektiosolun leveys fluidin korkeuteen verrattuna. Voimme todeta, että suluissa oleva termi onkin kriittinen Rayleighin luku R_c eri tavalla ilmaistuna.

Nyt on helppo huomata, että R_c on pienimmillään kun $a^2 = 1/2$. Artikkelissaan Saltzman kiinnittää parametrin a siten, että tämä niin kutsuttu Rayleighin ratkaisu vastaa spektrikomponenttia $(3, 1)$, joka onkin origossa maksimaalisesti epästabiili kun $a = 1/3\sqrt{2}$. Tähän perustuu yleisin Lorenzin yhtälöryhmän parametrivalinta $b = 4/(1 + (1/\sqrt{2})^2) = 8/3$.

Fourier-sarjan spektrikomponentin sanotaan olevan tasapainotilalle maksimaalisesti epästabiili, jos ylläolevan kaltaisessa hajotelmassa sen ominaisarvo Jacobin matriisille on suurin. Tällöin yhtälön linearisoidussa ratkaisussa kyseinen spektrikomponentti alkaa dominoida ajan kuluessa.

Lorenzin käyttämää yritelmää voidaan perustella Bénardin konvektiokokeella. Rayleigh muodosti lukunsa pyrkiessään matemaattisesti kuvaamaan Bénardin konvektiota, jossa fluidi jakautuu ajan kuluessa yhtä suuriin kuusikulmioihin säännöllisellä tavalla. Näiden kuusikulmioiden aallonpituuden ajatellaan olevan maksimaalisesti epästabiili tasapainotilalle ([17], s. 529). Lorenzin malli siis pyrkii kuvaamaan tätä fluidin asymptoottista käyttäytymistä. Ongelmana on, että suuremmilla suhdeluvun R/R_c arvoilla Saltzmanin yhtälöiden puoleensavetävä tasapainopiste ei liity origossa maksimaalisesti epästabiiliin spektrikomponenttiin. Vielä suuremmilla suhdeluvun R/R_c arvoilla yhtälöryhmän asymptoottiseen käyttäytymiseen voi liittyä useampia spektrikomponentteja, jolloin ratkaisujen visualisointiin ei riitä kolmiulotteinen avaruus ([19], s. 340, [20], s. 186). Lorenzin systeemin etuna kuitenkin on sen matala dimensionaalisuus, joka helpottaa ratkaisujen visualisointia ja näin helpottaa kaaoksen teoreettista tutkimista.

1.5 Eräitä vaihtoehtoisia Lorenzin mallin tulkintoja

Lorenzin yhtälöille on löydetty useita vaihtoehtoisia tulkintoja, joihin tosin liittyy koordinaatti- ja aikamuunnos. Näiden vaihtoehtoisten tulkintojen etuna on ilmiön tietty konkreettisuus ja suurempi realistisuus, kun yhtälön johtamiseen ei liity äärettömän summan katkaisemista. Tässä osiossa esitellään näistä vaihtoehtoisista tulkinnoista kaksi.

1.5.1 Vesimyyly

Tarkastelemme vaakasuoran akselinsa ympäri vapaasti pyörivää vesipyörää, jonka säde on a ([20], s. 194). Pyörän ulkokaari koostuu vuotavista osastoista. Kun pyörän päälle kaadetaan vettä, jakautuu vesi epätasaisesti näihin osastoihin. Veden massajakauman akseliin kohdistama vääntömomentti saa vesipyörän pyörimään. Pyörimisliikkeen luonne määräytyy veden lisäämisen nopeudesta, pyörän säteestä ja massasta, akselin kitkakertoimesta ja niin edelleen. Veden massakertymä hetkellä t ja kaaren kulmalla θ merkitään $m(\theta, t)$. Kulma θ kuvaa pyörän kääntymää vastapäivään. Näin ollen muutuja θ voidaan tulkita myös ajan funktioksi ja sen aikaderivaatta on pyörän

kulmanopeus Ω vastapäivään mitattuna. Merkitsemme

$$\widehat{(\quad)} = \int_0^{2\pi} (\quad) d\theta,$$

jolloin esimerkiksi \widehat{m} on pyörässä olevan veden kokonaismassa. Pyörimismäärän yhtälö on tässä tilanteessa

$$\frac{d(a^2\widehat{m}\Omega)}{dt} = -g\widehat{am\cos\theta} - ka^2\widehat{m}\Omega,$$

jossa oikean puolen ensimmäinen termi on pyörässä olevan veden akseliin kohdistama vääntömomentti ja jälkimmäinen on akselin kitkasta aiheutuva hidastava termi, jossa vakio k on kitkakerroin. Ensimmäisen termin negatiivisuus johtuu koordinaattien valinnasta. Massajakauman funktiolle saadaan yhtälöksi

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial m}{\partial t} + \Omega \frac{\partial m}{\partial \theta} = (A + 2B \sin \theta) - hm, \quad (1.19)$$

jossa suluiissa oleva termi kuvaa pyörään kaadettavan veden kerääntymisen nopeutta ja jälkimmäinen veden pyörästä ulos valumisen nopeutta. Oletuksena on, että vesi virtaa pyörän kehällä olevista osastoista ulos nopeudella, joka on verrannollinen osastossa olevan veden massaan. Lisäksi oletetaan, että pyörään tulevan veden kertymisen nopeus on verrannollinen osaston korkeuteen jostain verrokkitasosta. Tämä pätee jos vettä kaadetaan vesipyörään suoraan sen yläpuolelta tai, huomattavasti paremmin, jos vesipyörä on saateessa. Nähdään, että veden kokonaismassa \widehat{m} lähestyy asymptoottisesti arvoa $2\pi A/h$. Oletetaan, että kokonaismassa on asymptoottisesti arvossaan tai hyvin lähellä sitä. Uudeksi kulmanopeuden yhtälöksi saadaan

$$\frac{d\Omega}{dt} = -k\Omega - G\widehat{m\cos\theta}, \quad (1.20)$$

jossa $G = gh/2\pi aA$ laskujen yksinkertaistamiseksi. Nyt yhtälöryhmän toiseksi muuttujaksi valitaan akseliin kohdistuvaan vääntömomenttiin verrannollinen muuttuja $\widehat{m\cos\theta}$, jonka yhtälöksi saadaan yhtälöä 1.19 hyödyntämällä

$$\begin{aligned} \frac{d(\widehat{m\cos\theta})}{dt} &= \int_0^{2\pi} \frac{d(m\cos\theta)}{dt} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial m}{\partial t} + \Omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) \cos\theta - \Omega m \sin\theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (A \cos\theta + 2B \sin\theta \cos\theta - hm \cos\theta - \Omega m \sin\theta) d\theta \\ &= -\Omega \widehat{m\sin\theta} - h\widehat{m\cos\theta}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Pyörässä olevan vesimassan potentiaalienergia akselin tasoon verrattuna on verrannollinen muuttujaan $\widehat{m \sin \theta}$, jolle saadaan vastaavalla tavalla yhtälöksi

$$\frac{d(\widehat{m \sin \theta})}{dt} = \Omega \widehat{m \cos \theta} - h \widehat{m \sin \theta} + 2\pi B. \quad (1.22)$$

Yhtälöt 1.20, 1.21 ja 1.22 saadaan muutettua Lorenzin yhtälöiksi koordinaatimuunnoksella

$$\begin{aligned} \Omega &= -hX, \\ \widehat{m \cos \theta} &= \frac{hk}{G}Y, \\ \widehat{m \sin \theta} &= -\frac{hk}{G}Z + \frac{2\pi B}{h}. \end{aligned}$$

Lisäksi tarvitaan aikamuunnos $t = 1/h \tau$. Tällä tavoin saadussa Lorenzin systeemissä on parametrit $\sigma = k/h$, $r = 2\pi GB/k$ ja $b = 1$.

1.5.2 Laser

Vaikka Maxwell-Blochin yhtälöt eivät ole kaoottisia useimpien tavanomaisten laserien tapauksessa, voidaan sopivilla parametrivalinnoilla saavuttaa kaaos matemaattisessa mallissa ([1], s. 140). Laserissa on kahden peilin välissä, joista toinen on yleensä puoliheijastava, dielektristä materiaalia, jonka energiaspektrin jonkun korkeamman ja matalamman tilassa olevien atomien populaatioiden luontaiset suuruudet invertoidaan ulkoisen energialähteen avulla. Tämä populaatioinversio eli käänteismiehitys laukeaa, kun dielektrisessä materiaalissa kulkevat fotonit, joiden energia on näiden kahden energiatasojen ero, stimuloivat ylemmällä tasolla olevia atomeita vapauttamaan lisää fotoneita. Maxwell-Blochin yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\kappa E + \kappa P \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma_1 ED - \gamma_1 P \\ \frac{dD}{dt} &= \gamma_2(\lambda + 1) - \gamma_2 D - \gamma_2 \lambda EP, \end{aligned}$$

jossa muuttuja E on sähkökentän intensiteetti, muuttuja P on atomien keskimääräinen polarisaatio ja muuttuja D populaatioinversion suuruus. Parametrien tulkinnat ovat seuraavat: parametri κ on lasersäteen syntymisestä aiheutuvan sähkökentän heikkenemisen kerroin, γ_1 on atomisen polarisaation laukeamisen kerroin, γ_2 on populaatio inversion laukeamisen kerroin ja parametri λ kuvaa laitteeseen tulevan energian suuruutta.

Maxwell-Bloch'n yhtälöt muuttuvat Lorenzin systeemiksi aikamuunnoksella $t = 1/\gamma_1 \tau$ ja koordinaattimuunnoksella

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 \lambda}} X \\P &= \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2 \lambda}} Y \\D &= -Z + \lambda + 1.\end{aligned}$$

Näin saadussa Lorenzin systeemissä on parametrit $\sigma = \kappa/\gamma_1$, $r = \lambda + 1$ ja $b = \gamma_2/\gamma_1$.

Luku 2

Lorenzin malli dynaamisena systeeminä

Tässä luvussa ajattelemme Lorenzin mallia abstraktina matemaattisena objektina ottamatta kantaa tilamuuttujien mahdollisiin reaalimaailman vastaavuuksiin. Tätä varten joudumme käsittelemään dynaamisten systeemien teoriaa.

Lähtökohtana on alkuarvo-ongelma

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &:= \dot{\phi} = F(\phi), \\ \phi(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

jossa F on jokin avaruuden \mathbb{R}^n ajasta riippumaton eli *autonominen* vektorikenttä. Funktiota $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sanotaan *vektorikentän F määrittämäksi virtauksiksi*. Avaruutta \mathbb{R}^n kutsutaan systeemin *faasiavaruudeksi* ja sen koordinaatit ovat jotain kuvattavan systeemin ominaisuuksia. Lorenzin systeemin tapauksessa faasiavaruus on (X, Y, Z) . Jos vektorikentän F lausekkeessa on varioitavia kertoimia, näiden muodostamaa vektorivaruutta nimitetään systeemin *parametriavaruudeksi*. Lorenzin systeemin tapauksessa parametriavaruus on (σ, r, b) . Yhtälö 2.1 on yksikäsitteisesti ratkeava, joten jokaiseen faasiavaruuden pisteeseen liittyy tarkalleen yksi ratkaisukäyrä, eli systeemin *rata*, merkitään ϕ_{x_0} . Alkuarvoproblemaa 2.1 ja sen määrittelemien ratojen joukkoa kutsutaan *dynaamiseksi systeemiksi*.

Systeemin 2.1 *tasapainopisteitä* ovat ne pisteet x_i , joille $F(x_i) = \bar{0}$. Tämä tarkoittaa, että jos $\phi(0) = x_i$, niin $\phi(t) = x_i$ kaikilla ajan hetkillä t . Lorenzin systeemillä on yksi tasapainopiste, kun $r < 1$, eli $X = Y = Z = 0$. Kun $r > 1$,

löytyy origossa olevan tasapainopisteen lisäksi kaksi muuta tasapainopistettä

$$C_- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

ja

$$C_+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Hyvin olennainen kysymys on, miten pienet tasapainopisteestä eroavat häiriöt vaikuttavat systeemin kehitykseen. Tasapainopisteet voidaan jakaa kolmeen luokkaan tämän pohjalta.

Määritelmä 1 (Tasapainopisteen stabiilius). Olkoon x_0 jokin alkuarvoprobleeman 2.1 tasapainopiste ja δ jokin pieni häiriövektori. Tasapainopisteen sanotaan olevan stabiili, jos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{x_0+\delta} = x_0$$

kaikilla riittävän lyhyillä vektoreilla δ . Jos vektorin δ pituudelle ei ole ylärajaa, niin kaikkien faasiavaruuden pisteiden radat lähestyvät tasapainopistettä x_0 , kun $t \rightarrow \infty$. Tällöin tasapainopisteen sanotaan olevan *globaalisti stabiili*. Tasapainopisteen sanotaan olevan epästabiili eli repulsori, jos kaikilla riittävän pienillä vektoreilla δ pätee

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_{x_0+\delta} = x_0$$

silloin kun tämä raja-arvo on yksikäsitteisenä olemassa. Tasapainopisteitä, jotka eivät ole stabiileja tai epästabiileja, kutsutaan ei-stabiileiksi tai satulapisteiksi tai hyperbolisiksi tasapainopisteiksi. Hyperboliset tasapainopisteet ovat stabiileja joillekin vektorin δ suunnille ja epästabiileja toisille. Nämä suunnat määrittelevät tasapainopisteen stabiilin aliavaruuden $W^s(x_0)$ ja epästabiilin aliavaruuden $W^u(x_0)$. Tasapainopisteen invarianttien aliavaruuksien tangenttipinnat V^s ja V^u ovat laskettavissa lauseen 2 avulla.

Vektorikentän F linearisointi on

$$\dot{\phi}_{x+\delta} = \dot{\phi}_x + J_{\phi_x} F \cdot \delta, \quad (2.2)$$

jossa matriisi $J_{\phi_x} F$ on vektorikentän F Jacobin matriisi pisteessä ϕ_x . Matriisin $J_{\phi_x} F$ ominaisarvoille pätee seuraava lause, jota hyödynnettiin jo edellisessä luvussa sivulla 17.

Lause 2. *Tarkastelemme nyt alkuarvoprobleeman 2.1 jotain tasapainopistettä x . Olkoon nyt $t = 0$ ja $\dot{\phi}_x = 0$, jolloin edellinen yhtälö sievenee muotoon*

$$\dot{\phi}_{x+\delta} = J_x F \cdot \delta.$$

Nyt invariantin aliavaruuden $W^s(x)$ tangentialipinta pisteessä x on matriisin $J_x F$ niiden ominaisvektoreiden virittämä aliavaruus, johon liittyvien ominaisarvojen λ_i reaaliosa $\Re \lambda_i$ on negatiivinen. Vastaavasti invariantin aliavaruuden $W^u(x)$ tangentialipinta on matriisin $J_x F$ niiden ominaisvektoreiden virittämä aliavaruus, johon liittyvien ominaisarvojen λ_i reaaliosa $\Re \lambda_i$ on positiivinen.

Voidaan todeta, että linearisoidun differentiaaliyhtälön ratkaisu on ([15], s. 6)

$$\phi = \exp J_x F t.$$

Tämä tarkoittaa useimmiten, että matriisi $J_x F = G \Lambda G^{-1}$ on (kompleksisesti) similaarinen diagonaalimatriisin $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ kanssa, muunnosmatriisina on G , jonka sarakkeet ovat Jacobin matriisin ominaisvektoreita. Koska Jacobin matriisi on vakiomatriisi, voidaan yhtälö 2.2 derivoida puolittain ajan suhteen, jolloin tasapainopisteen tapauksessa saadaan

$$\frac{d^n}{dt^n} \phi_{x+\delta} = J_x F \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \delta = (J_x F)^n \cdot \delta.$$

Nyt voidaan muodostaa Taylorin kehitelmät kullekin vektorin δ koordinaattifunktiolle ja nämä osakuvaukset voidaan luonnollisella tavalla yhdistää matriisimuotoiseksi Taylorin polynomiksi

$$\begin{aligned} \phi_{x+\delta}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (J_x F)^n \cdot \delta(0) \\ &= G \text{diag}(e^{\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_n t}) G^{-1} \cdot \delta(0), \end{aligned}$$

joka tiettyjen säännöllisyysoletusten vallitessa suppenee riittävän pienillä t . Eulerin yhtälöstä seuraa, että kun $t \rightarrow \infty$ niin vain ne ominaisvektorit jäävät jäljelle, joiden ominaisarvon reaaliosa on epänegatiivinen. Epäselväksi jää vielä niiden ominaisarvojen virittämät aliavaruudet, joiden reaaliosa on nolla. Lauseen todistus löytyy lähteestä [12]. Lähteestä [3] löytyy sivulta 98 differentiaaligeometriaa hyödyntävä esitys lauseesta.

2.1 Lyapunovin funktio

Seuraavaksi on syytä pohtia origon stabiilisuutta parametrin arvoilla $r < 1$. Taustalla oleva fyysinen malli vaatisi, että kaikki alkuarvot lähestyvät asympotoottisesti origoa. Tämä kuulostaa vaikealta kysymykseltä vastata, mutta ratkaisu löytyy niin kutsutusta Lyapunovin funktiosta.

Määritelmä 3 (Lyapunovin funktio, ([5], s. 32)). Alkuarvoprobleeman 2.1 tasapainopiste x_0 on globaalisti stabiili, jos on löydettävissä funktio $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee:

1. $V \geq 0$ kaikilla faasiavaruuden pisteillä.
2. $V = 0$ jos ja vain jos $x = x_0$.
3. $\dot{V} = \nabla V \cdot F \leq 0$ kaikilla faasiavaruuden pisteillä.
4. $\frac{d}{dt}V \circ \phi = 0$ jos ja vain jos $x = x_0$.

Lorenzin systeemin tapauksessa sopivaksi Lyapunovin funktioksi osoitetaan esimerkiksi

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} X^2 + Y^2 + Z^2 \right),$$

jonka derivaatalle saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{\sigma} \dot{X}X + \dot{Y}Y + \dot{Z}Z \\ &= -X^2 - Y^2 - bZ^2 + (r+1)XY \underbrace{\leq}_{Z=0} -X^2 - Y^2 + (r+1)XY \\ &= R^2 \left(\frac{r+1}{2} \sin 2\theta - 1 \right) \leq R^2 \frac{r-1}{2} < 0, \text{ (kun } r < 1 \text{ ja } R > 0) \end{aligned}$$

jossa viimeisellä rivillä siirrytään napakoordinaatteihin. Tästä nähdään, että origon tasapaino on odotetusti globaalisti stabiili, kun $r < 1$.

2.2 Outo Attraktori

Kun $r > 1$ syntyy Lorenzin systeemiin kaksi uutta tasapainopistettä C_- ja C_+ , jotka ovat stabiileja, kun $r < r_H \approx 24.74$. Tämän kriittisen arvon r_H merkitystä tarkastellaan seuraavassa luvussa tarkemmin, mutta tässä vaiheessa riittää todeta, että klassisella parametrivalinnalla $r = 28$ systeemissä on kolme hyperbolista tasapainopistettä ja näiden lisäksi *outo attraktori*, jonka määrittelemme seuraavalla tavalla.

Määritelmä 4 ([20], s. 192). *Invariantti Joukko*: Joukon S sanotaan olevan invariantti virtauksen ϕ suhteen, jos $\phi_x(t) \in S$ kaikilla joukon S pisteillä x ja kaikilla ajan hetkillä t .

Ei-harhaileva joukko: Pisteen x sanotaan olevan harhaileva, jos on olemassa jokin pisteen x avoin ympäristö U ja aika T siten, että $x \notin \phi_U(t) =$

$\{\phi_y(t) | y \in U\}$ kaikilla $t > T$. Ne pisteet, jotka eivät harhaile, muodostavat systeemin ei-harhailevan joukon.

Attraktori: Suljetun joukon \mathbb{A}_ϕ sanotaan olevan virtauksen ϕ attraktori, jos kaikille joukon \mathbb{A}_ϕ tietyn ympäristön B pisteille x pätee

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{y \in \mathbb{A}_\phi} |\phi_x(t) - y| = 0.$$

Joukkoa B kutsutaan *attraktioaltaaksi*. Dynaamisella systeemillä voi olla useampia attraktoreita. Attraktioaltaiden välistä reunaa kutsutaan *separaattoriksi*. Virtauksen rajoittuma separaattoriin määrittelee uuden, alempidimensionaalisen dynaamisen systeemin.

Attraktorin sanotaan olevan outo, jos se on fraktaalinen, eli jos siitä paljastuu yhä uusia yksityiskohtia lähempää katsottaessa. (ks. seuraava osio ja selventävä kuva)

Tämän oudon attraktorin olemassaolo voidaan osittain ennustaa faasiavaruuden kompaktisuudella ja maksimaalisen Lyapunovin eksponentin positiivisuudella. Faasiavaruuden kompaktisuus määritellään seuraavalla tavalla.

Määritelmä 5 (Faasiavaruuden kompaktisuus). Dynaamisen systeemin 2.1 faasiavaruuden sanotaan olevan kompakti, jos kaikille systeemin alkuarvoille x on olemassa jokin aika $t'(x)$ ja pätee

$$\phi_x(T) \in P$$

jollakin rajoitetulla faasiavaruuden osajoukolla $P \subset \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $T > t'(x)$.

Tarkastelemme seuraavaksi yhtälöä 2.2 ja mitä tapahtuu, jos piste x ei ole tasapainopiste. Tällöin häirittyä rataa voidaan ajatella muodossa $\phi_{x+\delta} = \phi_x + \delta(t)$. Nyt saamme suoraan

$$\dot{\delta} = J_{\phi_x} F \cdot \delta. \quad (2.3)$$

Se lähestyykö vai etäännyykö häiritty rata $\phi_{x+\delta}$ häiritsemätöntä rataa ϕ_x riippuu systeemin *Lyapunovin eksponenteista*.

Määritelmä 6 (Lyapunovin eksponentti, ([3] s. 6)). Jos A on jokin ajasta riippuva tasaisesti rajoitettu matriisi, niin ratkaisuille v voidaan määritellä lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$\dot{v} = A(t)v$$

Lyapunovin eksponentti

$$\lambda(v) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|v\|.$$

Lyapunovin eksponentin määrittelevä lauseke voi saada enintään faasiavaruuden dimension verran erisuuria arvoja ([3], s. 6). Koska lauseessa 14 esitelty algoritmi vaatii kuitenkin tiettyä säännöllisyyttä, joudumme esittelemään Lyapunov-säännöllisyyden käsitteen.

Määritelmä 7 (Lyapunov-säännöllisyys ([3], s. 17, 32-33)). Lyapunovin eksponentit $\{\lambda_i\}_{i=1}^s$ ovat Lyapunov-säännöllisiä, jos ja vain jos on olemassa jokin sellainen reaalivaruuden hajotelma E_i , että

1. $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^s E_i$
2. Jos $v(0) \in E_i \setminus \bar{0}$, niin $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|v(t)\| = \lambda_i$.
3. $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \int Tr J(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^s \lambda_i \dim E_i$

Faasiavaruuden pisteen sanotaan olevan Lyapunov-säännöllinen, jos siihen liittyvä rata on Lyapunov-säännöllinen.

Toinen väite tarkoittaa, että Lyapunovin eksponentin määritelmässä voidaan ottaa myös negatiivisen ajan suhteen raja-arvo ja että \liminf antaa saman tuloksen kuin \limsup . Lyapunov-säännöllisyydestä seuraa, että jos $v_i \in E_i \setminus \bar{0}$ ja $v_j \in E_j \setminus \bar{0}$, niin ([3], s. 33)

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \sin \angle(v_i(t), v_j(t)) = 0.$$

On syytä huomata, että koska Lorenzin systeemin Jacobin matriisin jäänne on vakio, määritelmän kolmas vaatimus pätee seuraavaksi esiteltävän Osedecin lauseen nojalla.

Määritelmä 8 (Ergodisuus). Mitan ν sanotaan olevan kuvauksen f suhteen invariantti, jos $\nu(f^{-1}(Y)) = \nu(Y)$ ([4], s. 70). Joukon Y sanotaan olevan kuvauksen f suhteen invariantti, jos $f(Y) \subset Y$. Kuvauksen f suhteen invariantti mitta ν on ergodinen, jos kaikille kuvauksen f invarianteille joukoille Y pätee joko $\nu(Y) = 1$ tai $\nu(X \setminus Y) = 1$ ([3], s. 39).

Lyapunovin eksponenttien määritelmässä käytetty matriisi A voidaan korvata jonkin vektorikentän Jacobin matriisilla, jolloin Lyapunovin eksponentit määritellään häiriövektoreille. Integroimalla yhtälö 2.3 systeemin radan ϕ_x ylitse saadaan *tangenttikuvaus*

$$\delta = M_{x_0}(t) \delta(0),$$

jossa $M_{x_0} = \partial\phi/\partial x_0$ kuvaa miten pienet muutokset systeemin alkuarvoissa vaikuttavat radan kulkuun faasiavaruudessa. Tangenttikuvauksen M symmetrisen tulon $M^T M$ spektri on reaalinen ja positiivinen

$$\mu_1^2(t) \geq \mu_2^2(t) \geq \dots \geq \mu_n^2(t)$$

ja seuraavasta lauseesta sen nähdään olevan yhteydessä Lyapunovin eksponentteihin. Tämä Oseledecin lause antaa meille myös ensimmäisen keinon niiden laskemiseen ([6], s. 1064).

Lause 9 (Oseledecin lause). *Jos ν on jokin ergodinen mitta, niin todennäköisyydellä 1 (tämän mitan ν mielessä) raja-arvot*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mu_i(t) = \lambda_i$$

ovat olemassa ja riippumattomia alkuarvosta ja käytetystä koordinaatistosta. Toinen tapa ilmaista tämä on, että virtauksen Lyapunov-säännöllisten pisteiden joukko L_ϕ on täysimittainen jonkin ergodisen mitan ν mielessä, eli $\nu(L_\phi) = 1$. ([3], s. 39).

Lorenzin systeemin tapauksessa tämä tarkoittaa, että koska lähes kaikki radat ajautuvat attraktoriin, niin tangenttikuvauksen spektrille saatavat raja-arvot eivät riipu alkuarvosta, vaan pelkästään systeemin käytöksestä attraktorin sisällä.

Pienellä aikavälillä pieni $\phi(t)$ -keskeinen pallo deformatuu systeemissä 2.1 ellipsoidiksi, jonka pääakselien pituudet L_i ovat ajasta riippuvaisia yhtälöllä ([1], s. 121)

$$L_i(t) = L_i(0)e^{\lambda_i t}.$$

Lyapunovin eksponenttien joukkoa nimitetään systeemin Lyapunovin spektriksi ja nähdään, että sen nähdään olevan erittäin syvästi yhteydessä vektorikenttään F .

Lause 10. *Tarkastelemme vektorikentän F määrittelemää dynaamista systeemiä. Dynaamisen systeemin Lyapunovin eksponenteille $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ pätee*

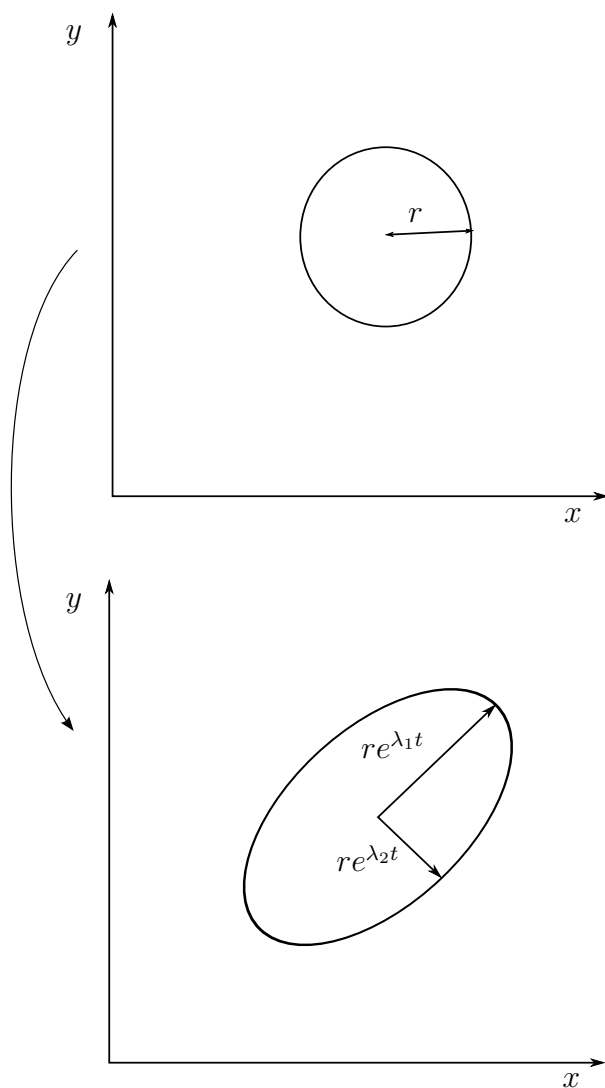
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \operatorname{Tr} J_{\phi_x} F.$$

Todistus. Ajattelemmme jonkin pienen faasiavaruuden tilavuuselementin $V(t)$ kehitystä pienen aikavälin kuluessa.

$$V(t) = V_0 e^{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t},$$

josta saadaan derivoimalla

$$\frac{dV}{dt} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) V(t).$$



Kuva 2.1: Lyapunovin eksponenttien käytöstä selventävä kuva.

Nyt lyhyellä aikavälillä δt tilavuuden muutos riippuu nettovirtauksesta NV tilavuuselementin rajan ∂V ylitse, eli

$$\Delta V = \delta t \cdot NV(V) = \delta t \int_{\partial V} (F \cdot n) dA,$$

jonka raja-arvona $\delta t \rightarrow 0$ saadaan

$$\frac{dV}{dt} = \int_{\partial V} (F \cdot n) dA.$$

Vetoamme divergenssiteoreemaan, jonka mukaan

$$\int_{\partial V} (F \cdot n) dA = \int_V \nabla \cdot F dV.$$

Näin saadaan

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) V, \quad \text{eli toisaalta}$$

$$\int_V \left(\nabla \cdot F - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) dV = 0.$$

Viimeisin pätee kaikille faasiavaruuden tilavuuselementeille, jolloin väite seuraa kumpuperiaatteen nojalla. Tämä tarkoittaa, että jos sulussa oleva termi olisi jossain pisteessä nollasta eroava, niin koska vektorikenttä F on jatkuva, olisi olemassa jokin tämän pisteen δ -säteinen ympäristö $B(x, \delta)$, jossa lauseke olisi joko positiivinen tai negatiivinen. Tällöin voitaisiin valita $V = B(x, \delta)$ ja ajauduttaisiin ristiriitaan. \square

Näemme nyt suoraan, että Lorenzin systeemin Lyapunovin eksponenttien summa on $-(\sigma + 1 + b) < 0$. Tällaisten systeemien sanotaan olevan *dissipatiivisia*. Toisena vaihtoehtona on, että systeemi säilyttäisi tilavuuden ja päitisi $\sum \lambda_i = 0$, jolloin systeemiä sanottaisiin *konservatiiviseksi*.

Dissipatiivisuus tarkoittaa, että virtaus kutistaa faasiavaruuden tilavuuksia. Hyvin usein on myös olemassa jokin nollamittainen joukko (tai useampi), johon kaikki alkuarvot kulkeutuvat. Jos lisäksi systeemin maksimaalinen Lyapunovin eksponentti on positiivinen, niin faasiavaruuden tilavuudet supistuvat eräissä suunnissa ja venyvät toisissa rajatta. Oletetaan lisäksi faasiavaruuden olevan kompakti. Jotta faasiavaruuden ainakin yhdessä suunnassa rajatta venynyt tilavuuselementti mahtuisi rajoitettuun joukkoon P , sen on pakko taittua itsensä päälle. Kun ajan annetaan kulua rajatta, näitä laskotumisia tapahtuu ääretön määrä ja lopputuloksena on äärettömän monesta laskoksesta koostuva outo attraktori.

Lorenzin systeemin faasiavaruuden kompaktisuus todistetaan hyödyntämällä yleistettyä Lyapunovin funktiota ([20], s. 196)

$$V = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma(z - 2r)^2,$$

jonka derivaatta on

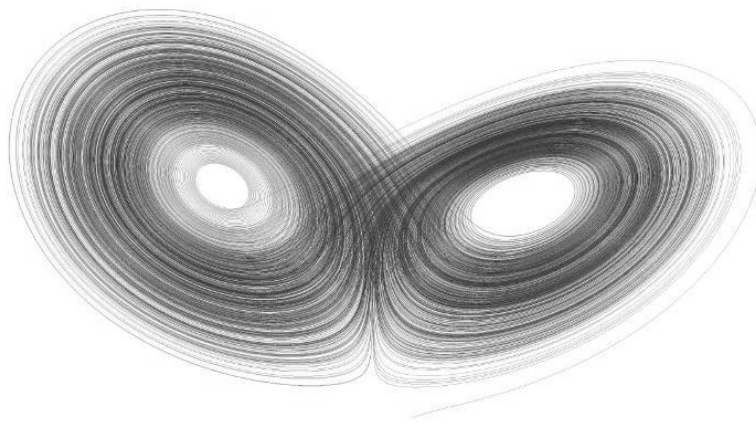
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + bZ^2 - 2brZ) \\ &= -2\sigma(rX^2 + Y^2 + b(Z - r)^2 - br^2). \end{aligned}$$

Olkoon D ellipsoidi, jolle $\dot{V} \geq 0$ ja c olkoon funktion V maksimi tässä ellipsoidissa. Olkoon E sellainen rajoitettu ellipsoidi, jossa $V \leq c + \epsilon$, jollekin $\epsilon > 0$. Jos piste x ei kuulu joukkoon E , niin se ei myöskään kuulu joukkoon D ja tällöin $\dot{V}(x) \leq -\delta(\epsilon) < 0$. Näin ollen funktion V arvo pienenee ajan kuluessa kaikilla ellipsoidin E ulkopuolisilla alkuarvoilla ja rajallisen ajan kuluttua $\phi(t) \in E$. Joukko E on myös invariantti, eli systeemin radat eivät poistu siitä. Tämä todistaa faasiavaruuden kompaktisuuden. Ellipsoidi D vastaa kuvan 2.2 keskikannasta.

2.3 Lorenzin Attraktori

On aika siirtyä teoriasta hieman konkreettisempaan matematiikkaan. Ensiksi on syytä todeta, että systeemiä ohjaava vektorikenttä on symmetrinen kuvauksen $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ osoittamalla tavalla. Lisäksi Z -akseli on invariantti ja kaikki sen pisteet kulkeutuvat origoon asymptoottisesti.

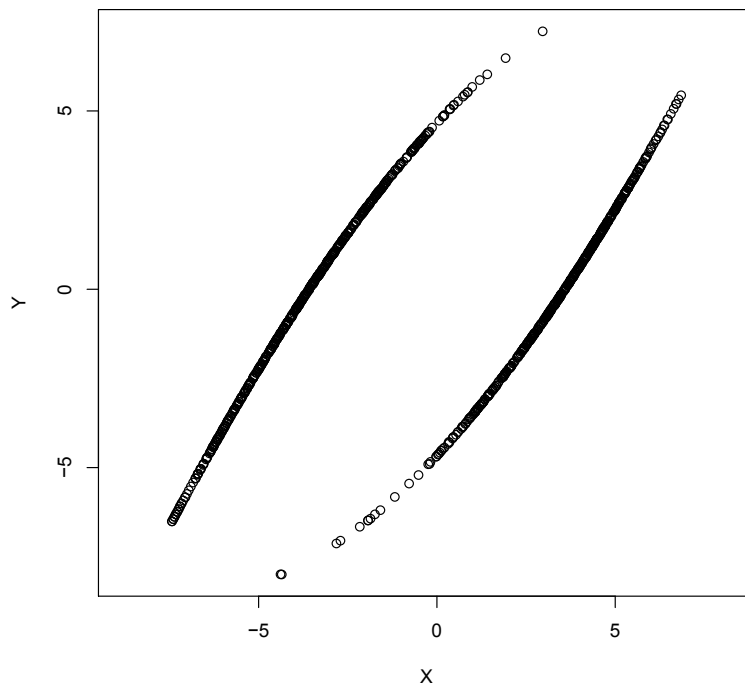
Kuvassa 2.2 on piirretty alkuarvolla $x_0 = (0, 1, 0)$ rata ajalle $[0, 1000]$. Paljastuvan fraktaalisen yksityiskohdat riippuvat alkuarvoista ja käytetystä numeerisesta ratkaisumenetelmästä, mutta kaikilla yleiskuva on sama. Lorenzin attraktori muodostuu kahdesta ohuesta levystä, jotka sulautuvat yhteen tasapainopisteitä C_{\pm} yhdistävällä suoralla I . Tasapainopisteiden C_{\pm} ympärillä on levyissä myös reikä. Systeemin radat kiertävät attraktorissa ja sen lähellä tasapainopistettä C_- myötäpäivään ja tasapainopistettä C_+ vastapäivään tarkasteltaessa attraktoria positiivisen x -akselin suunnasta.



Kuva 2.2: Eräs Lorenzin systeemin radoista, kun $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

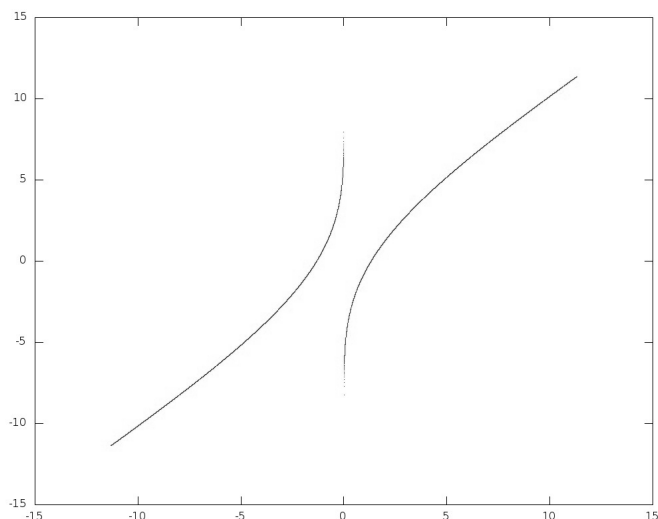
Jokaisella levyn kierroksella radat etääntyvät levyn keskellä olevasta ta-

sapainopisteestä ja tietyn kriittisen arvon ylittyessä vaihtavat levyä. Vaikka suoralla I (tai sen jälkeen) kaksi levyä eivät todellisuudessa liitykään yhteen kuten kuvasta 2.3 voidaan nähdä, katoaa niiden ero numeerisessa simulaatiossa eksponentiaalisesti. Lorenzin mallista voidaan johtaa puolivirtaus $\phi^+ : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, jossa toisiaan lähestyvät radat mielletään toisiinsa yhtyviksi. Tavallisen liukulukualgebran näkökulmasta tämä yksinkertaistus on ikävä kyllä myös pätevä.



Kuva 2.3: Poincarén leikkaus Lorenzin attraktorin keskikannaksesta tasolla $Z = r - 1 = 27$

Tämän puolivirtauksen pohjalta voidaan laatia paluukuvaus suoralle I , eli tarkastella millä koordinaatilla puolivirtauksen rata seuraavan kerran kulkee suoran I halki, ks. kuva 2.5. Näin ollen kysymys Lorenzin systeemin kaotisuudesta voidaan tyypistää yhteen yksiulotteiseen ja diskreettiaikaiseen kuvaukseen. Kuvassa 2.4 on tarkasteltu suoran I pisteiden ratojen toista leikkausta tason $Z = r - 1$ kanssa ja projisoitu nämä arvot takaisin suoralle I . Näin on saatu suunnilleen paluukuvauksen näköinen funktiokuvaaja, mutta koska levyt eivät ole täysin suoria ja koska ne lähenevät ja siirtyvät myös

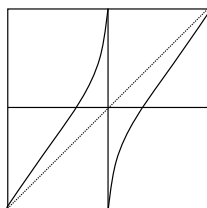
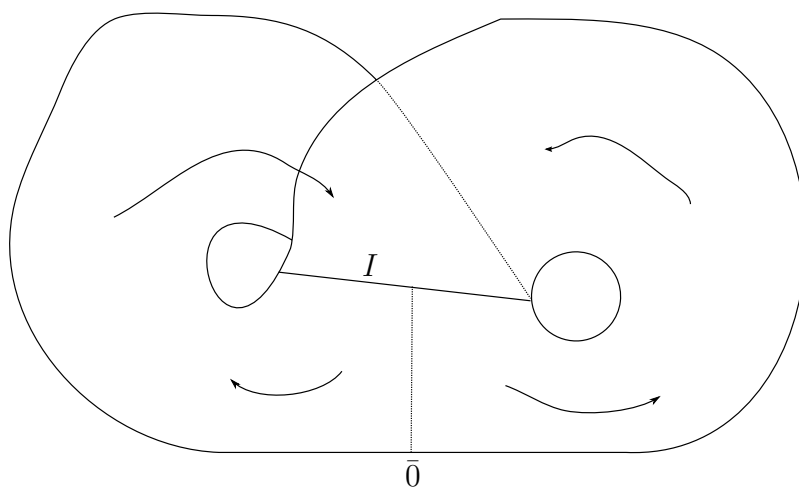


Kuva 2.4: Tasapainopisteitä yhdistävän suoran I ratojen toinen leikkaus tasoon $Z = r - 1$ kanssa projisoituna takaisin suoralle I .

sivusuunnassa, saatu kuvaaja ei ole täysin oikea.

Lorenzin attraktori muodostuu äärettömästä määrästä toisiaan lähellä olevista levyistä. Tämän joukon konstruktio muistuttaa hyvin paljon Cantorin joukon konstruktiota. Pienen tilavuuselementin annetaan kulkeutua faasiavaruudessa. Systeemin herkkyys alkuarvoille saa puolet tilavuudesta kiertämään tasapainopistettä C_- ja puolet tasapainopistettä C_+ . Jokaisen kierroksen jälkeen radat puristetaan lähelle toisiaan tasolla $Z = r - 1$ ja jaetaan sitten kiertämään uutta kierrosta. Tämän prosessin raja-arvona muodostuu fraktaali, jossa on kahdessa levyssä ääretön määrä ohuita liuskoja toisiinsa kiinni puristettuina. Kuvassa 2.6 on tarkasteltu Lorenzin systeemin käyttäytymistä keskikannaksen keskivaiheilla eli kun $Z = r - 1$. Esimerkiksi suorakulmio A_1 kuvautuu virtauksen ϕ ohjaamana suorakulmioiden A_1 ja A_3 unioniin. Edelleen joukon $\phi(A_1) \cap A_3$ pisteet vaihtavat seuraavalla kierroksella levyä ja kuvautuvat suorakulmioiden A_2 ja A_4 unioniin. Näin nähdään, että Lorenzin attraktorin pisteitä voidaan kuvailla sen mukaan miten ne kiertävät tasapainopisteiden C_{\pm} ympärillä olevia levyä. Tutkimalla suoran I paluukuvausta, löydetään jaksollisia ja epäjaksollisia ratoja. Tätä analyysia kuitenkin vaikeuttaa se, ettei paluukuvaus ole yksinkertaisin keinoin johdettavissa.

Vaikka suoran I paluukuvaus ei olekaan helposti laskettavissa (ks. [20], s. 234), yksinkertaisempi paluukuvaus saadaan Z -koordinaatin paikallisis-



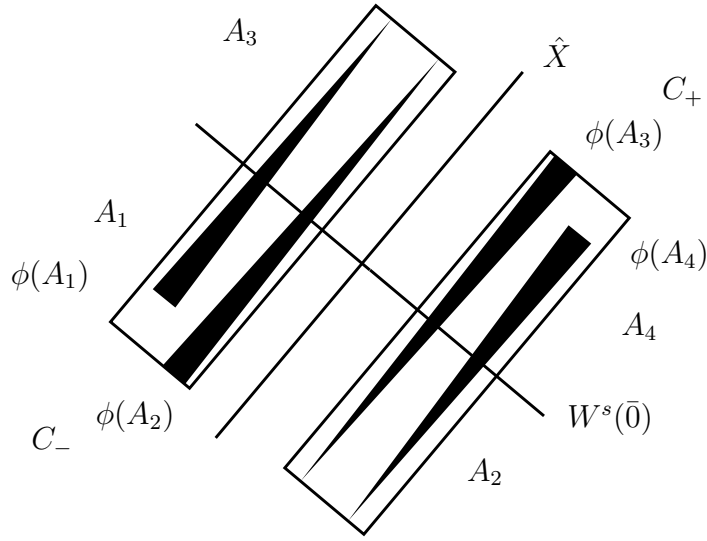
Kuva 2.5: Lorenzin mallista muodostettu puolivirtaus, alempana paluukuvaus ylemmän kuvan suoralle I .

ta maksimeista. Kuvassa 2.7 on x -akselilla paikallinen maksimi $Z(n)$ ja y -akselilla tätä seuraava maksimi $Z(n + 1)$. On nähtävissä, että rata vaihtaa levyä, jos kriittinen arvo $Z = 38.6$ ylittyy.

Tähän asti kaaosta on käsitelty melko ylimalkaisesti. Eri kirjoittajilla on erilaisia määritelmiä, mutta diskreettiaikaisille systeemeille seuraava määritelmä on yleisesti käytössä.

Määritelmä 11 (Systeemin kaaottisuus ([9], s. 205)). Funktion f ohjaaman diskreettiaikaisen systeemin sanotaan olevan kaaottinen, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. Systeemin jaksollisten ratojen joukko on tiheä.
2. Systemi on *topologisesti transitiivinen*, eli on olemassa rata, jonka pisteet ovat muodostavat tiheän joukon.



Kuva 2.6: Yksinkertaistettu kuvaus Lorenzin systeemin käyttäytymisestä suoran I ympäristössä, Sparrown mukaan [20], s. 34.

Jälkimmäisen ehdon kanssa yhtäpitävää on, että kaikille epätyhjille avoimille joukoille U ja V on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$f^N(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Topologisen transitiivisuuden lisäksi on olemassa toinen, voimakkaampi ehto, joka myös implikoi kaaosta. Funktion f ohjaaman dynaamisen systeemin sanotaan olevan topologisesti sekoittava, jos kaikille epätyhjille avoimille joukoille U ja V on olemassa kokonaisluku N siten, että

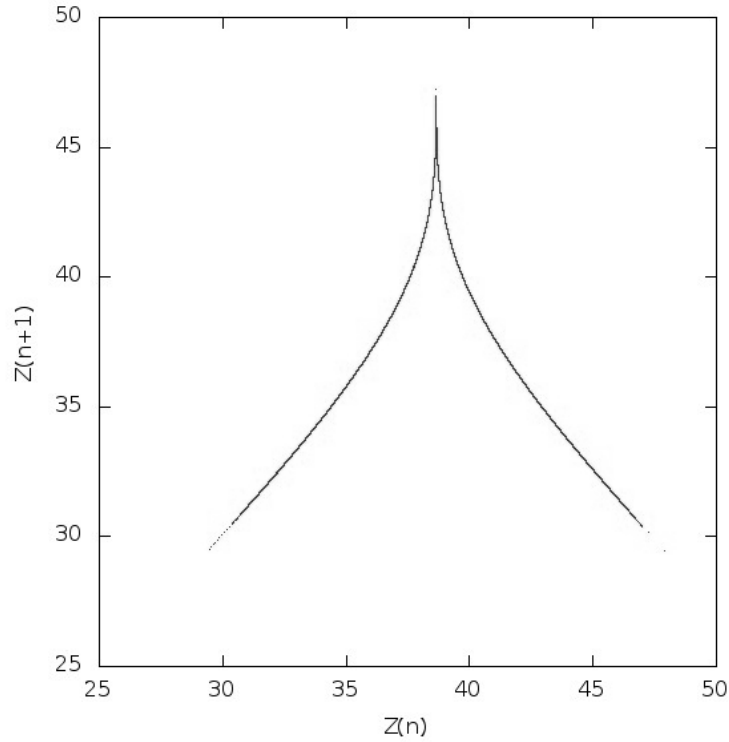
$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

kaikilla $n > N$ ([9], s. 207).

Tästä kaaottisuuden määritelmästä seuraa yhtäpitävästi esimerkiksi herkkyys alkuarvon muutoksille. Z -koordinaatin maksimin paluukuvaus on alkuarvojensa muutoksille herkkä, sillä kahdelle lähekkäiselle radalle Z_0 ja Z_1 pätee

$$Z_0(n) - Z_1(n) \approx w(Z_0(0) - Z_1(0)),$$

jossa w on paluufunktion derivaatta iteraatioilla $1, 2, \dots, n-1$. Koska paluufunktion derivaatta on kaikkialla suurempi kuin yksi, niin voidaan todeta, että lähes kaikki alkuarvoparit erkanevat toisistaan pienilläkin alkuarvojen



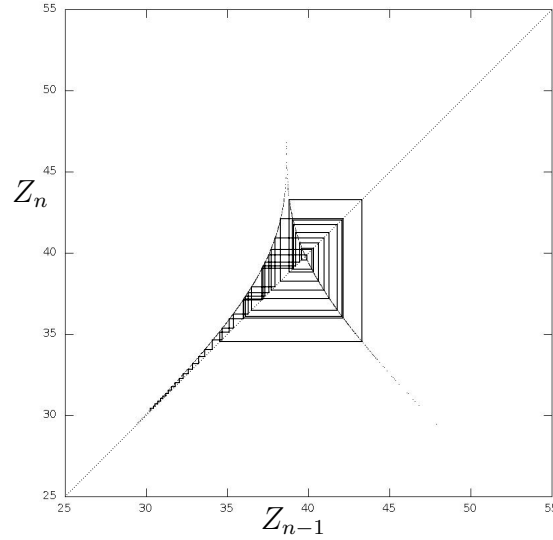
Kuva 2.7: Z -koordinaatin paikallinen maksimi

eroilla. Itseasiassa paluufunktio on paloittain konvekksi, joten ylläoleva on lähes kaikissa tapauksissa alaraja alkuarvojen erkenemisnopeudelle. Kuvauksen derivaatan suuruus merkitsee myös, että paluukuvaus on topologisesti sekoittava ja siten myös topologisesti transitiivinen ([9], s. 207).

Vielä puuttuu kuitenkin vaatimus jaksollisten ratojen tiheydestä. Paluukuvaus on numeerisesti määritelty ja sen epälineaarinen muoto vaikeuttaa kaoottisuuden formaalia todistamista. Tämän vuoksi Lorenzin esimerkin mukaisesti yksinkertaistamme sen lineaariseksi telttakuvaukseksi

$$T = 1 - |1 - 2x|,$$

jonka yleisesti tiedetään olevan kaoottinen. Jos ajattelemme telttakuvauksen iteraatioita, saamme tuloksena esimerkiksi 2. iteraatiolle



Kuva 2.8: Eräs paluukuvauksen radoista

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [0, 1/4] \\ 2 - 4x, & x \in [1/4, 1/2] \\ -2 + 4x, & x \in [1/2, 3/4] \\ 4 - 4x, & x \in [3/4, 1] \end{cases}.$$

Yleisesti telttakuvauksen T iteraatiot muodostuvat sen pienennetyistä kappaleista. Koska topologisen sekoittavuuden määritelmässä käytetty joukko U on avoin, se sisältää jonkin välin $[x, x + 2^{-N}]$, jossa luku x on rationaalinen. Edelläolevasta seuraa, että $T^N(U) = [0, 1] \supset V$ ja näin ollen kriteeri topologiselle sekoittavuudelle täyttyy. Tämän lisäksi sellaisten rationaalilukujen m/n radat, joille m ja n ovat parittomia ja keskenään jaottomia, ovat jaksollisia. Murtoluvun $T^t(m/n)$ nimittäjä on n (tai jokin sen tekijöistä) kaikilla $t > 0$, joten kyyhkyslakkaperiaatteen nojalla m/n on jaksollinen. Tällainen joukko, vaikkakaan ei koko rationaalilukujen joukko, on tiheä reaalilukujen joukossa.

Voidaan tietenkin kysyä voiko Lorenzin systeemin kaoottisuutta oikeasti perustella telttakuvauksen avulla. Z -koordinaatin maksimikuvauksen Z iteraatioille pätee samantyyppinen tulos kuin telttakuvauksellekin, eli Z^N muodostuu N kappaleesta kuvauksen Z pienennetyistä kappaleista väleillä, joiden pituus on 2^{-N+1} . Tämän tosiasian toteaminen on kuitenkin eri asia kuin sen

muodollinen todistaminen.

Lorenzin attraktorin koko olemassaolo oli pitkään todistamaton konjektuuri ja Sparrow toteaaakin monografiassaan, että periaatteessa niin kutsuttu Lorenzin attraktori voi muodostua ylinumeroituvasta määrästä jaksollisia ratoja, joiden attraktioallas vain on pienempi kuin käytetyn liukulukualgebran tarkkuus. Tällöin numeerinen algoritmi luisuisi satunnaisesti viereiselle radalle ja muodostuisi illuusio epäjaksollisuudesta ([20], s. 6). Tekniikan kehityksessä on kuitenkin tullut mahdolliseksi käyttää väli-algebraa ja Tucker todisti Lorenzin attraktorin olemassaolon vihdoinkin vuonna 1999 kehittämänsä tarkan algoritmin avulla ([9], s. 339).

2.4 Fraktaalidimensio

Tässä osiossa esitellään tunnusluku outojen attraktorien kuvailuun: fraktaalidimensio. Koska oudot attraktorit ovat nollamittaisia, suljettuja ja yhtenäisiä ([20], s. 198), tavallisen mittateorian keinot eivät sovi niiden karakterisoimiseen, vaan on käytettävä fraktaaligeometriaa. Koska oudot attraktorit koostuvat usein eräällä tapaa äärettömästä määrästä kerroksia tai laskoksia, niin on järkevää koettaa kuvailla tämän laskostumisen monimutkaisuutta tai sitä miten nopeasti uusia yksityiskohtia tulee näkyviin tarkasteltaessa attraktoria yhä lähempää.

Määritelmä 12 (Laatikkodimensio eli Minkowskin dimensio, [2], s. 172). Jaetaan n -ulotteinen reaaliavaruus säännöllisiin hyperkuutioihin, jonka jokaisen sivun pituus on ϵ . Olkoon $\#N(A, \epsilon)$ sellaisten hyperkuutioiden lukumäärä, joiden leikkaus joukon A kanssa on epätyhjä. Joukon A laatikkodimensio on raja-arvo

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \#N(A, \epsilon)}{-\log \epsilon},$$

jos tämä raja-arvo on yksikäsitteisenä olemassa. Tämä tarkoittaa, että kun luku ϵ lähestyy nollaa, niin joukon A peittämiseen tarvittavien hyperkuutioiden lukumäärä käyttäytyy kuin

$$\#N(A, \epsilon) \approx C\epsilon^{-D}.$$

Laatikkodimensiota ei tarvitse määritellä välttämättä hyperkuutioiden avulla. Sama raja-arvo saadaan myös tarkastelemalla lukua

$$\#M(A, \epsilon) = \inf\{M \mid A \subset \cup_{n=1}^M B(x_n, \epsilon)\},$$

jossa $B(x_n, \epsilon)$ on suljettu n -pallo ja pisteet x_n ovat sopivia reaaliavaruuden pisteitä.

Laatikkodimensio on myös kääntyvien lineaaristen kuvausten suhteen invariantti. Tämä nähdään tarkastelemalla jotain kääntyvää lineaarikuvausta L , jonka itseisarvoltaan pienintä ominaisarvoa merkitään λ_{min} ja suurinta λ_{max} . Koska $LA \subset \lambda_{max}A$, niin saadaan yläraja laatikkodimensiolle

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \#N(LA, \epsilon)}{-\log \epsilon} &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log |\lambda_{max}|^n \#N(A, \epsilon)}{-\log \epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log |\lambda_{max}|^n}{-\log \epsilon}}_{\rightarrow 0} + \frac{\log \#N(A, \epsilon)}{-\log \epsilon}. \end{aligned}$$

Pienintä ominaisarvoa vastaavasti tarkastelemalla saadaan sama alaraja joukolle LA . Tämä tarkoittaa, että edellisessä luvussa esitellyillä vaihtoehtoisten mallien attraktoreilla on sama dimensio lineaarisesta koordinaattimuunnoksesta huolimatta.

Fraktaalidimensioon liittyy pieniä sekaannuksia nimeämiskäytännössä. Ylläolevan määritelmän mukaista dimensiota kutsutaan joskus kirjallisuudessa myös Hausdorffin tai Hausdorff-Besicovitchin dimensioksi ([10], s. 190). Hausdorffin dimension määritelmä on kuitenkin erilainen.

Määritelmä 13 (Hausdorffin dimensio, [2], s. 195, 198). Joukon V halkaisija $diam(V)$ on

$$diam(V) = \sup\{d(x, y) : x, y \in V\}.$$

Joukon A p -ulotteinen Hausdorffin mitta on

$$\mathbb{M}(A, p) = \sup_{\epsilon > 0} \left\{ \inf \left\{ \sum diam(A_i)^p : A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i, diam(A_i) < \epsilon \right\} \right\}.$$

Nyt on olemassa sellainen yksikäsitteinen luku D_H , että

$$\mathbb{M}(A, p) = \begin{cases} \infty & p < D_H \\ 0 & p > D_H \end{cases},$$

jota kutsutaan Hausdorff-Besicovitchin dimensioksi.

Vaikka useilla hyvinkäyttävillä fraktaaleilla Minkowskin dimensio ja Hausdorffin dimensio ovatkin yhtäsuuria, ei tämä päde yleisesti, vaan yleisessä tapauksessa joudutaan tyytymään epäyhtälöön $0 \leq D_H \leq D \leq n$ ([2], s. 199).

2.4.1 Kaplan-Yorken estimaatti

Hausdorffin dimension laskeminen on jo määritelmällisesti monimutkaista. Laatikkomension tapauksessa kyseessä on laskennallisesti intensiivinen toimenpide, joka ei sellaisenaan ole edes sovellettavissa jatkuva-aikaisen attraktorin tapaukseen. Tietenkin on olemassa vaihtoehtoisia dimensioita, kuten esimerkiksi korrelaatioidimensio, mutta paljastuu, että Lyapunovin spektriä voidaan hyödyntää fraktaalidimension estimoimisessa. Kaplan-Yorken estimaatti fraktaalidimensiolle on

$$D_{KY} = n + \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{|\lambda_{n+1}|},$$

jossa n on suurin sellainen luku, että Lyapunovin eksponenttien summa $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \geq 0$ ([1], s. 124). Ajatuksena on, että pienetkin faasiavaruuden tilavuuselementit peittävät ajan kuluessa koko attraktorin. Määrittelemme analogisesti fraktaalidimension kanssa Kaplan-Yorken estimaatin, eli

$$D_{KY} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d(\log N(\epsilon))}{d(-\log \epsilon)},$$

jossa $N(\epsilon)$ on faasiavaruudessa kulkevan tilavuuselementin V peittämiseen tarvittavien sivuiltaan ϵ pituisten hyperkuutioiden lukumäärä. Lorenzin systeemin tapauksessa $\epsilon = \lambda_{min} = \lambda_3$. Yleisesti $\epsilon = \lambda_{n+1}$ siten, että eksponentteja $\lambda_{n+2}, \lambda_{n+3}, \dots$ vastaavat ulottuvuudet supistuvat nolnaan ylläolevassa osamäärässä. Nyt

$$N(\epsilon(t)) = \frac{V_0 e^{t \sum_i \lambda_i}}{V_0 e^{3t \lambda_{min}}} = e^{t(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3)}$$

ja toisaalta

$$\epsilon(t) = V_0^{1/3} e^{t\lambda_3}.$$

Ketjusääntöä soveltaen saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d(\log N(\epsilon))}{d(-\log \epsilon)} &= \frac{d(\log N(\epsilon))}{dt} \bigg/ \frac{d(-\log \epsilon)}{dt} \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3}{-\lambda_3}. \end{aligned}$$

Kaplan-Yorken estimaatin pätemiselle on kaksi välttämätöntä ehtoa: outo attraktori ei saa olla 'Cantorilainen' useammassa kuin yhdessä suunnassa ja taitoksien pitää tapahtua maksimaalisesti kutistavan Lyapunovin eksponentin suunnassa ([10], s. 205). Ensimmäinen ehto tarkoittaa, että oudon attraktorin on muistutettava jonkin Cantorin joukon ja säännöllisen pinnan karteesista tuloa. Lorenzin attraktori toteuttaa molemmat ehdot ainakin summitaisesti.

2.4.2 Lyapunovin spektrin estimointi

Lyapunovin spektri on siis löydettävissä sivulla 27 esitellyn lineaarikuvauksen avulla. Lyapunovin spektrin laskeminen määritelmän mukaan ei ole tavallisesti mahdollista, sillä tangenttikuvauksen M spektrin laskemiseen liittyy monia numeerisia ongelmia. Nämä ongelmat kuitenkin on mahdollista ratkaista seuraavalla algoritmilla.

Lause 14. *Olkoon E jokin ortonormaali ajasta riippuva $n \times n$ -matriisi. Kutsumme matriisin E sarakkeita systeemin kehysvektoreiksi. Olkoon $\Lambda(t)$ jokin ajasta riippuva n -ulotteinen vektori, jolle $\Lambda(0) = \bar{0}$. Määrittelemme lisäksi transformoidun Jacobin matriisin $J^* = E^T J E$ ja yläkolmiomatriisin L :*

$$\begin{cases} L_{lm} = J_{lm}^* + J_{ml}^* + 2\beta E_l \cdot E_m, & \text{kun } m > l \\ L_{mm} = J_{mm}^* + \beta(E_m \cdot E_m - 1), & \text{kun } m = l \end{cases}$$

jossa $\beta > 0$. Nyt luomme laajennetun differentiaaliyhtälön dynaamiselle systeemille:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= F \\ \dot{E} &= J E - E L \\ \dot{\Lambda}_i &= J_{ii}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Nyt lähes kaikilla alkuarvoilla (Lebesquen mitan mielessä) raja-arvot

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Lambda_i = \lambda_i$$

suppenevat Lyapunovin i . eksponenttiin alkuarvosta riippumatta, kunhan stabilisoiva parametri $\beta > -\lambda_n$.

Lyapunovin eri eksponentteja vastaavat aliavaruuden oletetaan tässä algoritmissa ortogonaalisiksi. Yleisesti tämä ei pidä paikkaansa. Vektoreiden E_m differentiaaliyhtälöä on mahdollista sieventää tekemällä termille $J E_m$ hajotelma kannassa E

$$J E_m = \left(\sum_l E_l E_l^T \right) J E_m = \sum_l E_m J_{lm}$$

ja sijoittamalla se yhtälöihin. Tällöin kun $\beta = 0$ saadaan tuloksena

$$\dot{E} = E A,$$

jossa A on vinosymmetrinen matriisi, kolmiulotteisen faasiavaruuden tapauksessa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -J_{21} & -J_{31} \\ J_{21} & 0 & -J_{32} \\ J_{31} & J_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Vinosymmetriset matriisit kuvaavat ortonormaalit joukot ortonormaaleiksi. Näin ollen kehysvektorit pysyvät ortonormaaleina äärettömän laskentatarkkuuden tapauksessa.

Algoritmi on jatkuva-aikainen versio Gram-Schmidtin ortonormeerauksesta. Transformoitu matriisi J^* on systeemin Jacobin matriisi kannassa E . Sen ensimmäinen sarakevektori riippuu vain itsestään, joten ajan kuluessa maksimaalinen Lyapunovin eksponentti alkaa dominoida sen käytöstä. Vastaavasti sarakevektori E_2 pakotetaan ortogonaaliseksi vektorin E_1 kanssa, jolloin sen käytöksestä eliminoidaan maksimaalisen Lyapunovin eksponentin vaikutus. Tällöin jäljelle jää toiseksi suurin Lyapunovin eksponentti λ_2 , joka alkaakin dominoida vektorin käyttäytymistä. Vastaava pätee myös muille sarakevektoreille. Tämä on kuitenkin vain heuristinen perustelu ja muodollinen todistus on hieman monimutkaisempi.

Lauseen todistus jakautuu kolmeen osaan. Ensiksi todistetaan induktiolla ortonormaalien vektoreiden ohjaaman differentiaaliyhtälön muoto. Sitten todistetaan algoritmin suppenevuus. Viimeiseksi tutkitaan ratkaisujen stabiilisuutta.

Todistus. Olkoon olemassa n kappaletta lineaarisesti riippumattomia radan ϕ häiriövektoreita $\{f_i\}_{i=1}^n$, joille pätee

$$\dot{f}_i = J_\phi f_i.$$

Ortonormalisoimme nämä vektorit ajasta riippuvan yläkolmiomatriisiin K avulla, eli

$$F = EK.$$

Todistamme matriisiin K alkioiden yhtälöt induktiolla sarakematriisien suhteen. Tarkastelemme ensin vektoria E_1 . Nyt $f_1 = E_1 K_{11}$, jolloin myös $Jf_1 = JE_1 K_{11} = \dot{f}_1 = \dot{E}_1 K_{11} + E_1 \dot{K}_{11}$. Tästä saadaan

$$0 = \dot{E}_1 K_{11} + E_1 \dot{K}_{11} - JE_1 K_{11}. \quad (2.4)$$

Nyt on syytä huomata, että koska vektori E_1 on yksikköpallon pinnalla kaikilla ajan hetkillä t , niin sen derivaatta \dot{E}_1 kuuluu pallopinnan tangenttitasolle ja tällöin $E_1 \cdot \dot{E}_1 = 0$. Yhtälön 2.4 pistetulo vektorin E_1 kanssa on

$$0 = \dot{K}_{11} - J_{11} K_{11}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön 2.4 ja jakamalla luvulla K_{11} saadaan haluttu lauseke vektorille E_1 . Lisäksi teemme muuttujanvaihdon $K_{11} = \exp \Lambda_1$.

Teemme induktio-oletuksen ja tarkastelemme vektoria E_m ja saamme yhtälöstä $\dot{f}_m = J f_m$

$$\sum_{l \leq m} (\dot{E}_l K_{lm} + E_l \dot{K}_{lm} - J E_l K_{lm}) = 0. \quad (2.5)$$

Kuten tapauksessa $m = 1$, pätee $E_m \cdot \dot{E}_m = 0$ ja induktio-oletuksen nojalla myös $E_m \cdot \dot{E}_l = J_{ml}$ kun $l < m$, joten ylläolevan vektoryhtälön sisätulo vektorin E_m kanssa on

$$\sum_{l < m} (J_{ml} K_{lm}) + \dot{K}_{mm} - \sum_{l \leq m} (J_{ml} K_{lm}) = 0,$$

josta seuraa toinen halutuista tuloksista $\dot{K}_{mm} = J_{mm} K_{mm}$. Tarkastelemaan todistettavaa yhtälöä nähdään, että kukin vektori E_i riippuu vain vektoreista E_1, E_2, \dots, E_i , joten uudelleenjärjestelemällä termit saadaan induktio-oletuksen nojalla tuloksena

$$\dot{E}_l - J E_l \in \text{Span}\{E_1, E_2, \dots, E_{m-1}\}$$

ja siten myös

$$\sum_{l < m} (\dot{E}_l K_{lm} + E_l \dot{K}_{lm} - J E_l K_{lm}) \in \text{Span}\{E_1, E_2, \dots, E_{m-1}\}$$

kaikilla $l < m$. Näin ollen yhtälö 2.5 voidaan kirjoittaa joidenkin (ajasta riippuvien) muuttujien c_l avulla

$$\dot{E}_m K_{mm} + E_m J_{mm} K_{mm} - J E_m K_{mm} = \sum_{l < m} E_l c_l.$$

Nyt yksinkertaisilla laskutoimituksilla nähdään, että $E_l \cdot E_m = 0$ ja $E_l \cdot \dot{E}_m = -\dot{E}_l \cdot E_m = -J_{ml}$ kaikille $l < m$. Ottamalla nyt ylläolevan yhtälön ja jonkin vektorin E_l välinen sisätulo saadaan

$$c_l = -(J_{ml} + J_{lm}) K_{mm}.$$

Sijoittamalla muuttujille c_l saadut yhtälöt ja jakamalla muuttuja K_{mm} pois saadaan todistettua differentiaaliyhtälön pätevän myös vektorille E_m .

Seuraavaksi tutkimme algoritmien konvergenssiä. Oletamme Lyapunovin spektrin olevan olemassa. Diagonalisoimme tangenttikuvauksen symmetrisen tulon

$$M^T M = \sum_m \mu_m^2 a_m a_m^T,$$

jossa $\{a_i\}$ on joukko ortonormaaleja vektoreita (tangenttikuvauksen symmetrisen tulon ominaisvektorit) ja $\{\mu_i\}$ ovat näihin ominaisvektoreihin liittyvät ominaisarvot suuruusjärjestyksessä. Nyt pätee

$$\|Mu\|^2 = \sum \mu_k^2 (a_k \cdot u)^2.$$

Tämän geometrinen tulkinta on, että yksikköpallon kuvajoukko kuvaukselle M on ellipsoidi, jonka pääakselien pituus on $\{\mu_k\}$. Olkoon nyt $1 > r > 0$ jokin mielivaltainen vakio siten, että $|a_1 \cdot u| > r$ kaikilla ajan hetkillä t . Tämän nojalla pätee epäyhtälö

$$\mu_1^2 \geq \|Mu\|^2 \geq r^2 \mu_1^2. \quad (2.6)$$

Edelleen saadaan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log \|Mu\|^2 - \lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mu_1 - \lambda_1 + \frac{1}{t} (\log \|Mu\| - \log \mu_1) = 0,$$

koska $\lambda_1 = \lim 1/t \log \mu_1$ ja suluissa oleva termi on alhaalta rajoitettu epäyhtälön 2.6 nojalla. Vaikka vektori a_1 riippuukin ajasta, niin koska vektori u on mielivaltainen, $|a_1 \cdot u| > r$ pätee kaikilla ajan hetkillä jollakin todennäköisyydellä $p(r)$, joka lähestyy arvoa 1 kun $r \rightarrow 0$. Tämä seuraa suoraan yksikköpallon pinta-alasta verrattuna siihen pinta-alaan, jolla epäyhtälö ei päde. Koska vakio r on mielivaltainen, se voidaan valita miten pieneksi tahansa ja tästä seuraa, että todennäköisyydellä 1 raja-arvo $\lim 1/t \log \|Mu\|$ on olemassa ja on maksimaalinen Lyapunovin eksponentti. Valitsemalla $u = E_1(0) = f_1(0)$ saamme $Mu = f_1 = K_{11} E_1 = \exp \Lambda_1 E_1$, jonka ylläolevaan sijoittamalla saamme halutun tuloksen.

Seuraavaksi todistamme algoritmin konvergoitumisen 2. Lyapunovin eksponentille. Emme todista yleistä tapausta, sillä laskut eivät periaatteeltaan eroa yleisessä tapauksessa. Otamme avuksi ulkotuloavaruuden käsitteen. Jos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on äärellisulotteisen sisätuloavaruuden V kanta, niin joukko $\{e_k \wedge e_l\}_{k < l}$ on ulkotuloavaruuden $\wedge^2 V = V \wedge V$ kanta. Ulkotuloavaruuden vektorituloksi voidaan määritellä

$$(u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2) = \begin{vmatrix} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 \end{vmatrix},$$

jonka avulla huomataan ulkotulon bilineaarisuus ja antisymmetrisyys $u \wedge v = -v \wedge u$. Lisäksi määritellään ulkotuloavaruuden versio lineaarisista kuvauksista:

$$\wedge^2 A(u_1 \wedge u_2) = A \wedge A(u_1 \wedge u_2) = Au_1 \wedge Au_2.$$

Tangenttikuvauksen symmetrisen tulon ulkotulolle saadaan

$$\begin{aligned} (u_1 \wedge u_2, \wedge^2(M^T M)v_1 \wedge v_2) &= \\ (u_1 \wedge u_2, M^T Mv_1 \wedge M^T Mv_2) &= \\ \det\{(u_i, M^T Mv_j)\} &= \det\{(Mu_i, Mv_j)\} = \\ (\wedge^2 Mu_1 \wedge u_2, \wedge^2 Mv_1 \wedge v_2) &= \\ (u_1 \wedge u_2, (\wedge^2 M)^T (\wedge^2 M)v_1 \wedge v_2), \end{aligned}$$

mikä tarkoittaa erityisesti, että

$$\wedge^2(M^T M) = (\wedge^2 M)^T (\wedge^2 M).$$

Kirjoitamme auki tangenttikuvauksen diagonalisoinnin ulkotuloavaruudessa. Ulkotuloavaruuden antisymmetrisyydestä ja bilineaarisuudesta seuraa

$$\wedge^2(M^T M)(u_1 \wedge u_2) = \sum_{i < j} \mu_i^2 \mu_j^2 a_i \wedge a_j (a_i \wedge a_j, u_1 \wedge u_2).$$

Erityisesti pätee

$$(u_1 \wedge u_2, \wedge^2(M^T M)(u_1 \wedge u_2)) = \sum_{i < j} \mu_i^2 \mu_j^2 (a_i \wedge a_j, u_1 \wedge u_2)^2.$$

Näistä kolmesta saadaan epäyhtälö

$$\mu_1 \mu_2 |(a_1 \wedge a_2, u_1 \wedge u_2)| \leq \| \wedge^2 M(u_1 \wedge u_2) \| \leq \mu_1 \mu_2.$$

Nyt todennäköisyydellä 1 pätee raja-arvo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \| \wedge^2 M(u_1 \wedge u_2) \| = \lambda_1 + \lambda_2$$

ja ylläolevan yhtälön vasemmalle puolelle saadaan seuraava yhtäsuuruus, alhaalta rajoitettua termiä lukuunottamatta joka katoaa kun $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \| f_1 \wedge f_2 \| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |K_{11} K_{22}| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\Lambda_1 + \Lambda_2),$$

josta hyödyntämällä aiemmin todistettua tulosta maksimaaliselle Lyapunovin eksponentille saadaan haluttu tulos myös Lyapunovin 2. eksponentille.

Viimeisenä pohdimme algoritmin stabiilisuutta. Koko todistuksen ajan on oletettu matriisin E pysyvän ortonormaalina. Ratkaisut kuitenkin pohjautuvat aina johonkin enemmän tai vähemmän epätarkkaan numeeriseen menetelmään. On syytä tarkastella, mitä tapahtuu muuttujille $\Delta_{pm} = E_p \cdot E_m - \delta_{pm}$. Suoraan derivoimalla saadaan tulokseksi

$$\dot{\Delta}_{pm} = -(2\beta + L_{mm} + L_{pp}) - \sum_{l < m} \Delta_{pl} L_{lm} - \sum_{l < p} \Delta_{lm} L_{lp}.$$

Selkeästi $\Delta_{pm} \equiv 0$ on tasapainopiste, mutta linearisoimalla kunkin muuttujan Δ_{pm} differentiaaliyhtälöt pienen laskuvirheestä syntyneen eron δ_{pm} suhteen saadaan

$$\dot{\delta}_{pm} = -(2\beta + L_{mm} + L_{pp})\delta_{pm} + G(\{\delta_{pl}\}_{l < m}, \{\delta_{lm}\}_{l < p}),$$

jossa funktio G on multilineaarinen. Yhtälöiden stabiilius riippuu vain ensimmäisestä termistä. Algoritmi on siis stabiili, jos

$$-(2\beta + L_{mm} + L_{pp}) < 0,$$

joka pätee jos

$$\beta > \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \Lambda_m = -\lambda_m$$

kaikilla $m = 1, 2, \dots, n$. Koska Lyapunovin eksponentit ovat suuruusjärjestyksessä, niin algoritmi on stabiili jos $\beta > -\lambda_n$. \square

2.4.3 Numeeriset tulokset

Laskettiin 1000 spektriestimaattia satunnaisilla alkuarvoilla edellisen osion algoritmilla, aika-askeleena 2^{-10} ja simulaatioaikana $T = 1000$. Lorenzin systeemin ratojen laskemiseen käytettiin 6. asteen Taylorin polynomeja ja kehysvektorien laskemiseen kaksoisapproksimaatiomenetelmää. Asymptoottisesti lineaarisille funktioille Λ_i oli käytössä Eulerin menetelmä. Muistia kului 140 kilotavua ja Sempron 140 -proessorilla kului aikaa noin tunti ja 20 minuuttia. Vektorikentän F divergenssiksi estimoitui $\sum \lambda_i = -13.647367$, suhteellinen virhe -0.14% . Spektrin estimointi epäonnistui viidellä alkuarvolla, johon syynä saattoi olla alkuarvon liian suuri etäisyys attraktorista tai radan osuminen origon stabiiliin aliavaruuteen. Numeeriset tulokset taulukossa 2.1.

	KA	\sqrt{MSE}
λ_1	0.921	0.013
λ_2	0.034	0.0018
λ_3	-14.6	0.015
D_{KY}	2.0654	0.0008

Taulukko 2.1: Numeeriset estimaatit Lorenzin systeemin tunnusluville.

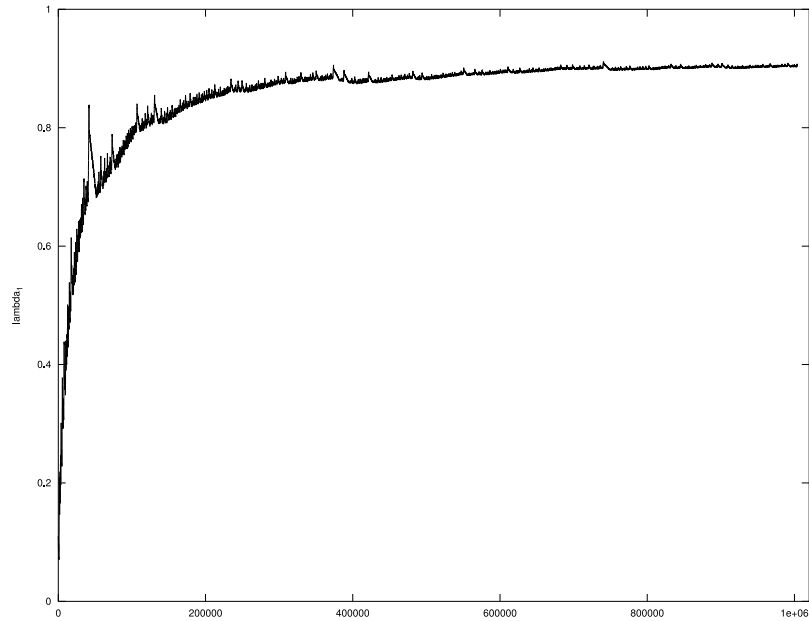
Teoreettisesti 2. Lyapunovin eksponentin pitäisi olla nolla ([1], s. 122, [6], s. 1067). Tämän vuoksi on syytä laskea myös muokattu fraktaalidimension

estimaatti $2 + \lambda_1/|\lambda_3| = 2.0631$, joka onkin huomattavasti lähempänä aiemmin julkaistuja tuloksia. Lisäksi $\lambda_1 + \lambda_3 = -13.68$, suhteellinen virhe 0.11%.

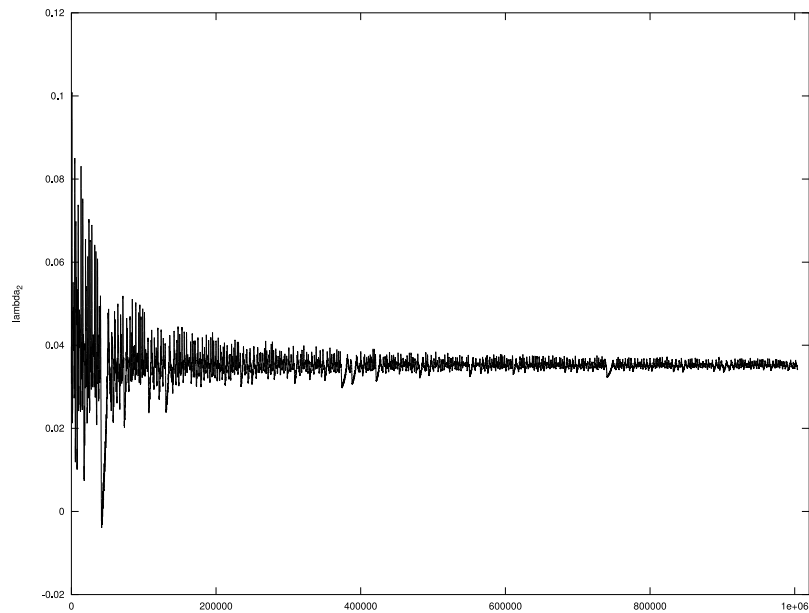
Tarkastelemalla Lorenzin alkuperäisen artikkelin taulukkoa 2 nähdään, että ratojen kierrosaika tasapainopisteiden C_{\pm} ympäri on suunnilleen $t_1 = 0.72$. Koska Outo attraktori muistuttaa (lokaalisti) n -tason ja Cantorin joukon karteesisista tuloa ([15], s. 300), voidaan Kaplan-Yorken estimaatin desimaaliosan ajatella olevan tämän Cantorin joukon fraktaalidimensio. Cantorin joukko sisältää k kappaletta itsensä kopioita pienennyssuhteella h . Tällaisen joukon fraktaalidimensio on ([2], s. 183):

$$D = \frac{\log k}{-\log h}$$

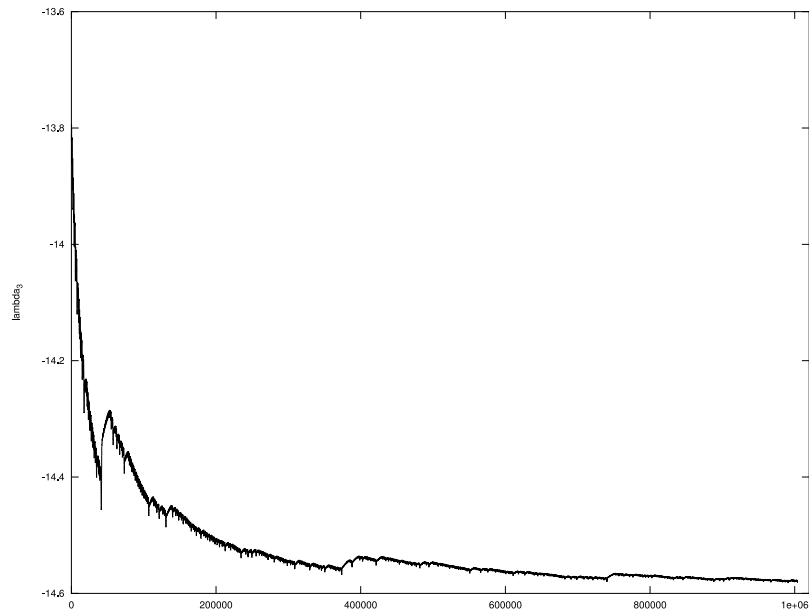
Kuvassa 2.6 origon stabiili aliavaruus $W^s(\bar{0})$ jakaa tason $Z = r - 1$ kahtia ja kutistava Lyapunovin eksponentti puristaa suorakulmiot A_1 ja A_2 yhdeksi ja suorakulmiot A_3 ja A_4 toiseksi levyksi. Tämän perusteella Lorenzin attraktorin sisältämässä Cantorin joukossa on 2 kappaletta itsensä kopioita. Pienennyssuhde on $h = \exp \lambda_{min} t_1$. Fraktaalidimensioksi saadaan tällä laskentatavalla $D = \log 2 / (-\lambda_{min} t_1) = 0.066$. Tämän lisäksi näemme, että $\exp \lambda_{max} t_1 = 1.9 \approx 2$, kuten pitääkin.



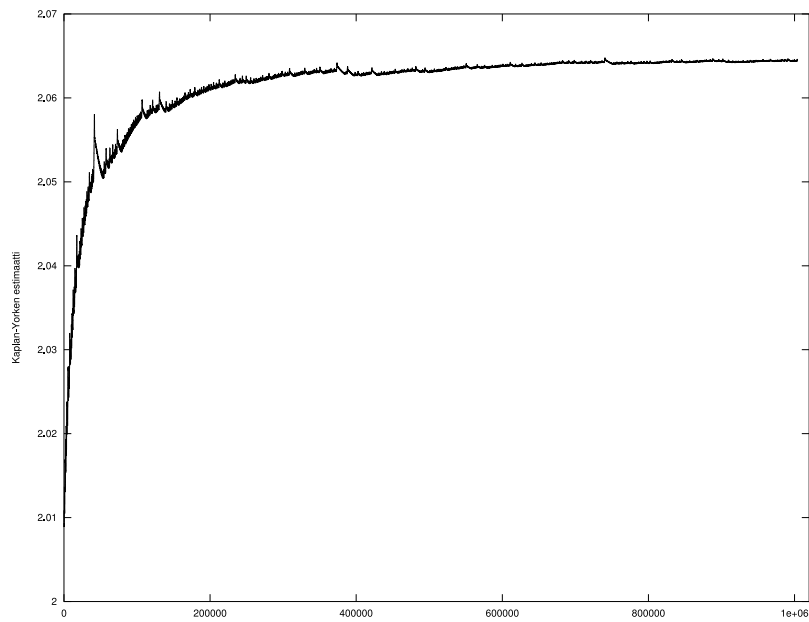
Kuva 2.9: Suurimman Lyapunovin eksponentin estimaatin $\frac{1}{t}\Lambda_1(t)$ kehitys ajan kuluessa. Lähtöarvona kaikissa neljässä kaaviossa $X_0 = (0, 1, 0)$ ja ensimmäiset 20000 iteraatiota on poistettu datasta.



Kuva 2.10: Virtauksen suuntaisen Lyapunovin eksponentin estimaatin $\frac{1}{t}\Lambda_2(t)$ kehitys ajan kuluessa.



Kuva 2.11: Supistavan Lyapunovin eksponentin estimaatin $\frac{1}{t}\Lambda_3(t)$ kehitys ajan kuluessa.



Kuva 2.12: Kaplan-Yorken estimaatin D_{KY} kehitys ajan kuluessa.

Luku 3

Lorenzin attraktorin muodostuminen

Parametrin r pienillä arvoilla systeemillä oli vain yksi globaalisti stabiili tasapainopiste, kun taas arvolla $r = 28$ systeemin faasiavaruuteen oli ilmaantunut fraktaalaisesti monimutkainen outo attraktori. Nämä kaksi erittäin erilaista systeemin käytöstä vaikuttavat vaikeasti yhteensovitettavilta. Tässä osiossa tutkimme miten Lorenzin systeemin käytös muuttuu välillä $r \in [1, 25]$.

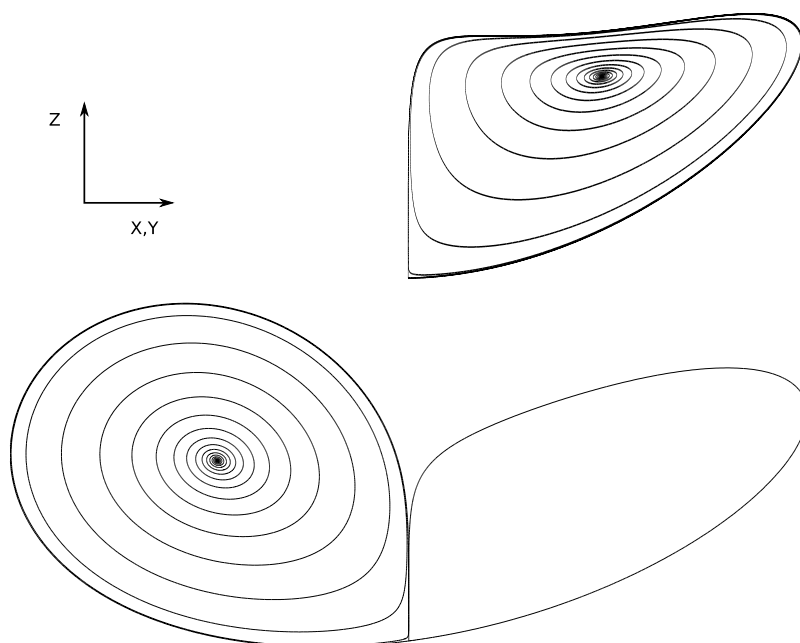
3.1 Homokliininen bifurkaatio

Kun $r > 1$, Lorenzin systeemin alkuarvot konvergoituvat yleensä jompaankumpaan tasapainopisteistä C_- ja C_+ (origoon konvergoituvien alkuarvojen joukko on nollamittainen). Origoon stabiili aliavaruus $W^s(\bar{0})$ jakaa faasiavaruuden symmetrisesti näiden pisteiden attraktioaltaisiin. Kun parametri r on suhteellisesti vain hieman suurempi kuin $r_0 = 1$, origon epästabiilin aliavaruuden positiivinen haara konvergoituu positiivisella puolella olevaan tasapainopisteeseen C_+ ja vastaavasti negatiivinen haara konvergoituu tasapainopisteeseen C_- .

Parametrin r ylittäessä jonkin kriittisen arvon r' origon epästabiilin aliavaruuden haarat vaihtavat keskenään raja-arvopisteitä, eli positiivinen haara kiertyy negatiivisille x - ja y -koordinaateille ja vastaavasti negatiivinen haara kiertyy positiiviselle kvadrantille. Tämä on mielenkiintoinen tilanne, sillä systeemin radat eivät voi kulkea origon stabiilin aliavaruuden $W^s(\bar{0})$ lävitse. Näin ollen, kun $r > r'$, tasapainopisteiden C_{\pm} attraktioaltaiden separaattori on kietoutunut monimutkaisesti origon epästabiilin aliavaruuden ympärille ([20], s. 13). Sen voidaan sanoa olevan jopa fraktaalinen. Tämä separaattorin fraktaalisuus on eräs tapa kaaoksen syntymiselle (esim. [1], s.

64). Hyperbolisten tasapainopisteiden laskemiselle on kehitetty useita algoritmeja ja Lorenzin systeemin origon stabiilin aliavaruuden eräs kuva arvolla $r = 28$ löytyy lähteestä [11].

Kriittinen arvo r' on laskelmieni mukaan noin 14.210976947. Sparrow on lähteessä [20] saanut vastaavaksi tulokseksi 13.926. Kuvassa 3.1 on ylempänä hieman arvoa r' pienemmällä parametrin r arvolla saatu Lorenzin systeemin rata ja alemmassa kuvassa hieman kriittistä arvoa suuremmalla parametrin r arvolla. Alemmassa kuvassa systeemin rata kiertää ensin yhden kierroksen



Kuva 3.1: Lorenzin systeemi kahdella parametrin r arvolla. Ylemmässä kuvassa $r = 14.21097694689699419965$ ja alemmassa $r = 14.2109769468969941997$.

tasapainopisteen C_+ ympäri, käy sen jälkeen hyvin lähellä origoa ja konvergoituu lopuksi tasapainopisteeseen C_- . Koska vektorikenttä F riippuu jatkuvasti parametreistaan, ainoa selitys tälle on, että parametrin arvolla $r = r'$ origon epästabiili aliavaruus kuuluu myös origon stabiiliin aliavaruuteen. Tämä tarkoittaa, että kriittisellä arvolla on olemassa kaksi homokliinistä rataa (molemmille tasapainopisteille), jotka lähestyvät sekä positiivisella että negatiivisellä ajalla origoa. Tämä homokliininen rata muistuttaa hyvin paljon kuvan 3.1 alemman radan oikeaa puoliskoa.

Tähän asti olemme käsitelleet vain faasiavaruuden pisteiden liikkeitä. On kuitenkin mahdollista myös laskea radan derivaatta parametriavaruudessa.

Tällöin rata $\phi_{x_0}^r$ muuttuu joksikin lähellä olevaksi radaksi $\phi_{x_0+\Delta x}^{r+\Delta r}$. Tässä tapauksessa meitä kiinnostaa $\partial\phi/\partial r$, joka kuvaa miten koko rata muuttuu vektorikentän parametrin r muuttuessa. Saadaan selville, että heti kriittistä arvoa r' suuremmilla parametrin arvoilla homokliininen rata irtoaa origosta ja muuttuu jaksolliseksi. Sparrow on seurannut numeerisesti tämän uuden jaksollisen radan kulkua parametrin r kasvaessa. Sen huomataan olevan tärkeässä osassa tasapainopisteiden C_{\pm} stabiiliuden menetyksessä.

Homokliinisessa bifurkaatiossa muodostuu myös *alkuperäinen invariantti joukko*: numeroituvasti ääretön määrä jaksollisia, ylinumeroituvasti ääretön määrä epäjaksollisia ja ylinumeroituvasti ääretön määrä origoon päättyviä ratoja. Tämä selviää kun tarkastellaan tason $Z = r - 1$ paluukuvausta origon epästabiilin aliavaruuden toisen leikkauskohdan ympäristössä kun $r \approx 1$. Kuvassa 2.4 nähtävä paluukuvausten epäjatkuvuuskohta syntyy homokliinisessä bifurkaatiossa ja nähdään tästä epäjatkuvuudesta seuraavan, että on olemassa joukko ratoja, jotka eivät pääse pakenemaan homokliinisen radan naapurustosta, vaan kiertävät yksityiskohdista riippuen joko epäjaksollisesti tai jaksollisesti tasapainopisteitä C_{\pm} tai päätyvät origoon. Parametrin r arvoilla, jotka ovat vain hieman suurempia kuin 1 tämä outo joukko ei ole havaittavissa numeerisesti, mutta parametrin kasvaessa sen stabiilisuus kasvaa ja muuttuu lopulta attraktoivaksi *Lorenzin Attraktoriksi* ([20], s. 21, 199)!

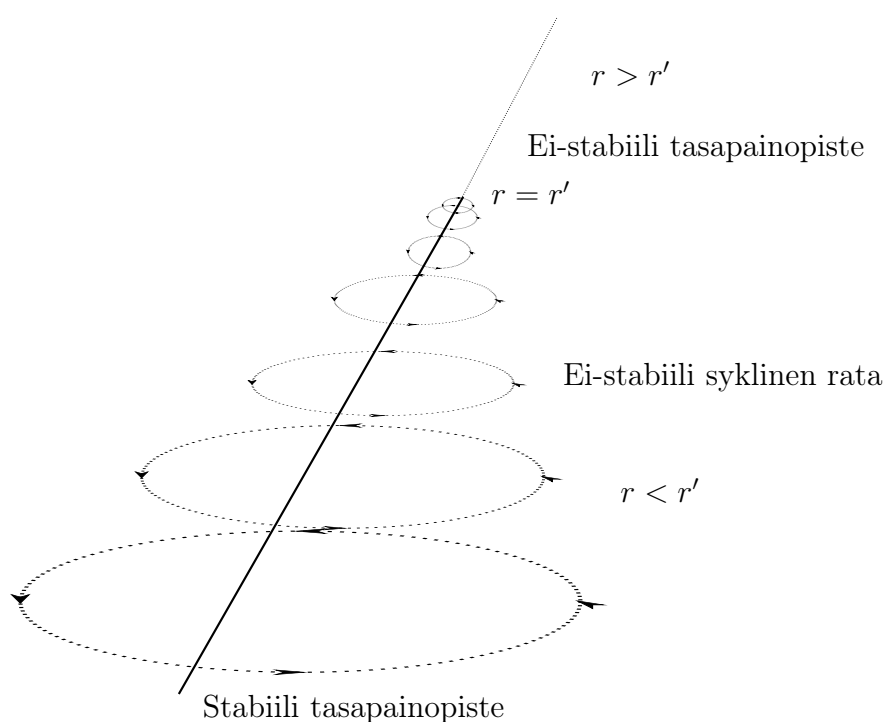
3.2 Hopfin bifurkaatio

Lauseessa 2 sivulla 23 käsiteltiin vain niitä tasapainopisteen Jacobin matriisin ominaisarvoja, joiden reaaliosa on nolasta eroava. Jos kuitenkin $|JF| = 0$, niin olemassa ainakin yksi ominaisarvo λ , jolle $\Re\lambda = 0$. Tällä tavoin määrittyy tasapainopisteen *keskiavaruus* (*center manifold*) $W^c(x)$. Tavallisesti keskiavaruus on olemassa vain jollain yksittäisellä bifurkaatioparametrin arvolla r' , jossa tapahtuu tasapainopisteen bifurkaatio.

Jos $\dim W^c(x) = 1$, niin kyseessä on jokin mahdollisista satulapistebifurkaatioista, jollainen muodostaa tasapainopisteet C_{\pm} arvolla $r = r_0 = 1$. Toinen vaihtoehto on, että Jacobin matriisilla on kaksi puhtaasti imaginaarista ominaisarvoa ja systeemin lineaarisaatio tasapainopisteen ympäristössä muodostuu rotaatiosta hypertasolla V^c ja konvergenssista tai divergenssista jäljelle jäävillä hypertasoilla V' . Tällöin kyseessä on jompikumpi mahdollisista Hopfin bifurkaatioista: superkriittinen ja subkriittinen. Näille yhteistä on, että bifurkaatioparametrin muuttuessa jonkin jaksollisen radan pituus lähestyy nollaa yhtyen lopulta tasapainopisteeseen parametrin arvolla r' .

Bifurkaation laatu riippuu tasapainopisteen ja jaksollisen ratkaisun stabiiliudesta tai sen puutteesta. Jos stabiili jaksollinen rata yhtyy ei-stabiiliin

tai epästabiiliin tasapainopisteeseen, lopputuloksena on stabiili tasapainopiste. Tämän tyyppistä bifurkaatiota kutsutaan *superkriittiseksi*. Mikäli taas ei-stabiili tai epästabiili jaksollinen rata yhtyy stabiiliin tasapainopisteeseen, lopputuloksena on vastaavasti ei-stabiili tai epästabiili tasapainopiste. Tämän tyyppistä bifurkaatiota kutsutaan *subkriittiseksi*. On syytä arvella, että Lorenzin systeemin tasapainopisteet C_{\pm} menettävät stabiiliutensa nimenomaan subkriittisessä Hopfin bifurkaatiossa ([20], s. 11). Bifurkaatioon osallistuva jaksollinen rata muodostuu homokliinisessä bifurkaatiossa edellisessä osiossa kuvatulla tavalla.



Kuva 3.2: Selventävä kuva subkriittisestä Hopfin bifurkaatiosta

Tämän muodollinen todistaminen vaatii monimutkaisia laskutoimituksia, jotka löytyvät lähteestä [15] sivulta 142. Näihin liittyvä yleinen kaava löytyy samasta lähteestä sivulta 126. Vaikka näihin laskutoimituksiin sisältyykin laskuvirhe yleisessä tapauksessa ([20], s. 11), ne eivät vaikuta lopputulokseen tavallisella parametrivalinnalla.

Tiivistelmä Fourier-analyysin ja useiden yksinkertaistusten ja koordinaattimuunnosten jälkeen Navier-Stokesin yhtälö saadaan supistettua kolmen reaalimuuttujan epälineaariseksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöryhmäksi. Lähes kaikki tämän niin kutsutun Lorenzin systeemin ratkaisut lähestyvät fraktaalista outoa attraktoria asympotoottisesti, kun mallin parametrit valitaan sopivasti. Tämän oudon attraktorin fraktaalidimension Kaplan-Yorken estimaatiksi saadaan 2.0654, joka vastaa suunnilleen aiemmin julkaistuja tuloksia. Tämän jälkeen käydään läpi tämän attraktorin muodostuminen bifurkaatioparametrin r kasvaessa. Mainittakoon alkuperäisen invariantin joukon muodostuminen homokliinisessä bifurkaatioissa arvolla $r = 12.21$ ja Hopfin bifurkaatio arvolla $r = 24.74$.

Liite A

Ohjelmistokoodi Lyapunov spektrin laskemiseksi

```
1 #include <stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include <time.h>
4 #include <math.h>
5
6
7 /*
8
9  esimerkki ohjelman tuottamasta tulosteesta:
10
11  0.920711  0.034336  -14.602414
12  0.0001650776  0.0000031685  0.0002288136
13
14
15  ***
16
17  2.0654025991  0.0000006089
18  * 5
19
20  */
21
22 void Matriisitulo(double*, double*, double*);
    //Matriisitulo(A, B, C) tallentaa pointeriin A
    matriisin A+B*C
23 void Ortonormalisoi(double*); //Ortonormalisoi
    argumenttina annetun matriisin
24
```



```

25 double Neliomuoto(double*, double*, int, int); //e_int1
    dot jaakob dot e_int2 = jaakob_int1, int2
26 double Kehystulo(double*, int, int); //e_int1 dot e_int2
27 void Kehyspaivitys(double*, double*, double*, double*,
    double, double);
28 //eulerin menetelmä, näiden ketjuttaminen johtaa
    kaksoisapproksimaatiomenetelmään
29
30 double Tulotermi(double[][3], int, int, int);
31
32 void YleinenLorenzDerivaatta(double[][3], int);
    //käytetään lorenzin systeemin n. derivaatan
    laskemiseen, tallennetaan matriisin n. riville
33 void LorenzJaakob(double*, double*); //tallentaa Lorenzin
    systeemin Jaakobin matriisin 2. argumentissa annetussa
    pisteessä 1. argumenttiin
34
35 void LyapunovinSpektri(double*, double, double, double);
    //Tallentaa ensimmäiseen argumenttiinsa Lyapunovin
    spektrin, joka lasketaan kolmessa viimeisessä
    argumentissa annetun lähtöarvon pohjalta
36
37 int main(){
38
39     int nro_of_tests = 1000;
40     double Dtests = (double) nro_of_tests;
41     int i;
42     int fail=0;
43     double Lyapunov[3];
44     double lambda1[nro_of_tests];
45     double lambda2[nro_of_tests];
46     double lambda3[nro_of_tests];
47     double meanlambda1=0.;
48     double meanlambda2=0.;
49     double meanlambda3=0.;
50     double varlambda1=0.;
51     double varlambda2=0.;
52     double varlambda3=0.;
53
54     double kaplanyorke[nro_of_tests];
55     double meankaplanyorke=0.;
56     double varkaplanyorke=0.;
57

```

```

58
59 double X, Y, Z;
60
61 for(i=0; i<nro_of_tests; i++){
62
63     unsigned int seed = (unsigned int)time(NULL);
64     srand (seed);
65
66     X = (( rand() % 1000 ) - 500. ) / 20.;
67     Y = (( rand() % 1000 ) - 500. ) / 20.;
68     Z = (( rand() % 1000 ) - 500. ) / 20.;
69
70     LyapunovinSpektri(Lyapunov, X, Y, Z);
71
72     kaplanyorke[i]=2. -(Lyapunov[0] + Lyapunov[1]) /
73         Lyapunov[2];
74     lambda1[i]=Lyapunov[0];
75     lambda2[i]=Lyapunov[1];
76     lambda3[i]=Lyapunov[2];
77     if(isnan(kaplanyorke[i])){
78         i--;
79         fail++;
80     }
81     /*
82     printf("%f %f %f \n", Lyapunov[0], Lyapunov[1],
83         Lyapunov[2]);
84     printf("%f %f %f \n", X, Y, Z);
85     */
86 }
87
88 for(i=0; i<nro_of_tests; i++){
89     meanlambda1+=lambda1[i];
90     meanlambda2+=lambda2[i];
91     meanlambda3+=lambda3[i];
92     meankaplanyorke+=kaplanyorke[i];
93 }
94 meanlambda1 /= Dtests;
95 meanlambda2 /= Dtests;
96 meanlambda3 /= Dtests;
97 meankaplanyorke /= Dtests;
98
99 for(i=0; i<nro_of_tests; i++){

```

```

98     varlambda1 += (lambda1[i] - meanlambda1)*(lambda1[i] -
          meanlambda1);
99     varlambda2 += (lambda2[i] - meanlambda2)*(lambda2[i] -
          meanlambda2);
100    varlambda3 += (lambda3[i] - meanlambda3)*(lambda3[i] -
          meanlambda3);
101    varkaplanyorke += ( kaplanyorke[i] - meankaplanyorke )
          * ( kaplanyorke[i] - meankaplanyorke);
102    }
103    varlambda1 /= Dtests - 1.;
104    varlambda2 /= Dtests - 1.;
105    varlambda3 /= Dtests - 1.;
106    varkaplanyorke /= Dtests - 1.;
107
108    printf("%f_%f_%f_\n", meanlambda1, meanlambda2,
          meanlambda3);
109    printf("%0.10f_%0.10f_%0.10f_\n_\n_\n", varlambda1,
          varlambda2, varlambda3);
110    printf("***_\n_\n_%0.10f_%0.10f_\n_*_%d_\n",
          meankaplanyorke, varkaplanyorke, fail);
111    return 0;
112 }
113
114
115 void LyapunovinSpektri(double* Lyapunov, double X, double
      Y, double Z){
116
117     //begin muuttujien määrittely
118     double aika=0.;
119
120     double askel=0.0009765625;
121     //2**-10=0.0009765625, askelpituus
122
123     int steps=1024000;
124     //askelien lukumäärä
125
126     int i, j, k, n;
127     //laskurimuuttujia
128
129     int m=0;
130
131     int taylorin_aste=6;
132     //käytetyn taylorin polynomin aste

```

```

133
134 double beta=15.;
135 //stabiilisuusvakio
136
137 double apuvektori[taylorin_aste];
138 //apuvektori, joka sisältää taylorpolynomien
    muodostamiseen  $h^n / n!$ 
139
140 apuvektori[0]=askel;
141 for(n=1; n<taylorin_aste; n++){
142     apuvektori[n]=(apuvektori[n-1]*askel)/((double) n);
143 }
144
145 //double systeemintila[3]; //X_0
146 //systeemintila[0]=X;
147 //systeemintila[1]=Y;
148 //systeemintila[2]=Z;
149 double systeemin_muutos[taylorin_aste + 1][3];
150 //sisältää lorenzin systeemin derivaatat asteeseen
    taylor asti
151
152 systeemin_muutos[0][0]=X;
153 systeemin_muutos[0][1]=Y;
154 systeemin_muutos[0][2]=Z;
155
156 //rivillä 0 on systeemin tila, rivillä 1 ensimmäinen
    derivaatta, rivillä 2 toinen, etc
157
158 //double* apuvektori2; //apuvektori, käytetään lorenzin
    systeemin numeerisessa integroinnissa funktion
    tulosten tallentamiseen
159
160 //kaksi apumatriisia kaksoisaproksimaatiomenetelmän
    välivaiheisiin
161 double apumatriisi1[9]={0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
    0.};
162 double apumatriisi2[9]={0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
    0.};
163
164 double* kehys=(double*) calloc(9, sizeof(double));
165 //tarkasteltavan pisteen ympärillä olevan ellipsin
    pääakselit, myöhemmin
166

```

```

167  for(n=0; n<3; n++){*(kehys+4*n)=1.;}
168
169  double gamma[3]={0., 0., 0.};
170  //sisältää aika*lyapunov kun time goes to infty
171
172  //jaakobin matriisit
173  double lorenzjaakob[9];
174  LorenzJaakob(lorenzjaakob, systeemin_muutos[0]);
175  double transformoitu_jaakob[9];
176  LorenzJaakob(transformoitu_jaakob, systeemin_muutos[0]);
177  //kehys valittu siten että transformoitu_jaakob on
      aluksi yhtenevä
178  //end of muuttujien määrittely
179
180
181  //begin numerics
182  //printf("begin numerics \n");
183  for(i=0; i<steps; i++){
184
185      aika+=askel;
186      gamma[0]+= askel * transformoitu_jaakob[0];
187      gamma[1]+= askel * transformoitu_jaakob[4];
188      gamma[2]+= askel * transformoitu_jaakob[8];
189      //printf("%f %f %f \n", transformoitu_jaakob[0],
      transformoitu_jaakob[4], transformoitu_jaakob[8]);
190      //Kehyksen alustava päivitys hetkelle t+1
191      Kehyspäivitys(apumatriisil, kehys, lorenzjaakob,
      transformoitu_jaakob, askel, beta);
192
193      //begin taylor polynomial, systeemin tilan päivitys
      hetkelle t+1
194
195      for(j=0; j<taylorin_aste; j++){
196          YleinenLorenzDerivaatta(systeemin_muutos, j+1);
197      }
198
199      for(k=0; k<3; k++){
200          for(j=0; j<taylorin_aste; j++){
201              systeemin_muutos[0][k] += apuvektori[j] *
              systeemin_muutos[j+1][k];
202          }
203      } //end of taylor polynomial
204

```

```

205 LorenzJaakob(lorenzjaakob , systeemin_muutos[0]);
206 //Jaakobin matriisin päivittäminen hetkelle t+1
207
208 //Jaakobin matriisin transformoiminen alustavasti
    hetkelle t+1
209 for(k=0; k<3; k++){
210     for(j=0; j<3; j++){
211         transformoitu_jaakob[3*k+j] =
            Neliomuoto(lorenzjaakob , apumatriisi1 , k, j);
212     }
213 }
214
215
216 //kehysten apuaskel , päivittäminen hetkelle t+2
217 Kehyspaivitys(apumatriisi2 , apumatriisi1 ,
    lorenzjaakob , transformoitu_jaakob , askel , beta);
218
219 //kaksoisapproksimaatio-algoritmi , kehysten
    päivittäminen hetkelle t+1
220 for(j=0; j<9; j++){
221     kehys[j]= 0.5*(apumatriisi2[j] + kehys[j]);
222 }
223
224 //Jaakobin matriisin lopullinen transformoiminen
    hetkelle t+1
225 for(k=0; k<3; k++){
226     for(j=0; j<3; j++){
227         transformoitu_jaakob[3*k+j] =
            Neliomuoto(lorenzjaakob , kehys , k, j);
228     }
229 }
230
231 }
232 //end numerics
233
234 Lyapunov[0]=gamma[0]/ aika ;
235 Lyapunov[1]=gamma[1]/ aika ;
236 Lyapunov[2]=gamma[2]/ aika ;
237 free(kehys);
238 return ;
239 }
240
241

```

```

242
243
244 //apufunktioita
245 void Matriisitulo(double* tulos, double* matriisia,
    double* matriisib){
246     int i, j, k;
247
248     for(i=0; i<3; i++){
249         for(j=0; j<3; j++){
250             for(k=0; k<3; k++){
251                 tulos[3*i+j] += matriisia[3*i+k] *
                    matriisib[3*k+j];
252             }
253         }
254     }
255 }
256
257 return;
258 }
259
260 void Ortonormalisoi(double* kehys){
261
262     int i, j, k;
263     double kerroin;
264
265     for(i=0; i<3; i++){
266         kerroin = kehys[i]*kehys[i] + kehys[3+i]*kehys[3+i] +
            kehys[6+i]*kehys[6+i];
267         kehys[i] /=kerroin;
268         kehys[3+i] /=kerroin;
269         kehys[6+i] /=kerroin;
270     }
271
272     for(i=0; i<3; i++){
273         for(j=0; j<i; j++){
274             kerroin = kehys[i]*kehys[j] + kehys[3+i]*kehys[3+j]
                + kehys[6+i]*kehys[6+j];
275             kehys[i] -=kerroin*kehys[j];
276             kehys[3+i] -=kerroin*kehys[3+j];
277             kehys[6+i] -=kerroin*kehys[6+j];
278         }
279     }
280

```

```

281  return;
282 }
283
284 double Neliomuoto(double* jaakob, double* kehys, int
    indeksil, int indeksi2){
285  int i, j;
286  double tulos=0.;
287
288  for(i=0; i<3; i++){
289    for(j=0; j<3; j++){
290      tulos += kehys[3*i+indeksi1] * jaakob[3*i+j] *
        kehys[3*j+indeksi2];
291    }
292  }
293  return tulos;
294 }
295
296
297 double Kehystulo(double* kehys, int indeksil, int
    indeksi2){
298
299  double tulos=0.;
300  int j;
301
302  for(j=0; j<3; j++){
303    tulos += kehys[3*j+indeksi1]*kehys[3*j+indeksi2];
304  }
305
306  return tulos;
307 }
308
309 void YleinenLorenzDerivaatta(double systeemin_muutos[][3],
    int derivaatan_aste){
310  double sigma=10.;
311  double bee=8./3.;
312  double rho=28.;
313
314  systeemin_muutos[derivaatan_aste][0] =
    sigma*(systeemin_muutos[derivaatan_aste - 1][1]
315    - systeemin_muutos[derivaatan_aste - 1][0]);
316  systeemin_muutos[derivaatan_aste][1] =
    rho*systeemin_muutos[derivaatan_aste - 1][0]
317    - systeemin_muutos[derivaatan_aste - 1][1]

```



```

318     - Tulotermi(systeemin_muutos, 0, 2, derivaatan_aste
319         - 1);
319     systeemin_muutos[derivaatan_aste][2] =
320         Tulotermi(systeemin_muutos, 0, 1, derivaatan_aste - 1)
321         - bee*systeemin_muutos[derivaatan_aste - 1][2];
321     return;
322 }
323
324 void LorenzJaakob(double* tulos, double* systeemintila){
325
326     double sigma=10.;
327     double bee=8./3.;
328     double rho=28.;
329
330     tulos[0]=-sigma;
331     tulos[1]=sigma;
332     tulos[2]=0.;
333
334     tulos[3]=rho-systeemintila[2];
335     tulos[4]=-1.;
336     tulos[5]=-systeemintila[0];
337
338     tulos[6]=systeemintila[1];
339     tulos[7]=systeemintila[0];
340     tulos[8]=-bee;
341
342     return;
343 }
344
345
346 void Kehyspaivitys(double* tulos, double* kehys, double*
347     jaakob, double* transformoitu_jaakob, double askel,
348     double beta){
349
350     int i, j;
351     double voivoi[9];
352
353     for(i=0; i<9; i++){
354         tulos[i]=0.;
355         voivoi[i]=0.;
356     }
357
358     for(i=0; i<3; i++){

```

```

357     for(j=i; j<3; j++){
358
359         if(i==j){
360             voivoi[3*i+j] -= beta*( Kehystulo(kehys, i, j) -
361                 1.) + transformoitu_jaakob[3*i+j];
362         }else{
363             voivoi[3*i+j] -= transformoitu_jaakob[3*i+j] +
364                 transformoitu_jaakob[3*j+i];
365             voivoi[3*i+j] -= 2*beta*Kehystulo(kehys, i, j);
366         }
367     }
368
369     Matriisitulo(tulos, kehys, voivoi);
370     Matriisitulo(tulos, jaakob, kehys);
371
372     /*
373     voivoi[1] += -transformoitu_jaakob[3];
374     voivoi[2] += -transformoitu_jaakob[6];
375
376     voivoi[3] += transformoitu_jaakob[3];
377     voivoi[5] += -transformoitu_jaakob[7];
378
379     voivoi[6] += transformoitu_jaakob[6];
380     voivoi[7] += transformoitu_jaakob[7];
381
382     Matriisitulo(tulos, kehys, voivoi);
383     */
384
385     for(i=0; i<9; i++){
386         tulos[i] *= askel;
387     }
388
389     for(i=0; i<9; i++){
390         tulos[i] += kehys[i];
391     }
392
393     return;
394 }
395
396 double Tulotermi(double systeemin_muutos[][3], int
    muuttuja1, int muuttuja2, int derivaatan_aste){

```

```

397
398 int i;
399 double tulos=0.;
400 double binomikerroin=1.;
401
402 for(i=0; i<=derivaatan_aste; i++){
403     tulos += binomikerroin *
           systeemin_muutos[derivaatan_aste-i][muuttuja1] *
           systeemin_muutos[i][muuttuja2];
404     binomikerroin *= (double) (derivaatan_aste - i);
405     binomikerroin /= (double) (i+1);
406 }
407
408 return tulos;
409 }
410 //end of apufunktioita

```

Kirjallisuutta

- [1] Baker G. L., Jerry P Gollup, Chaotic dynamics: an introduction, Cambridge University Press, 1990
- [2] Barnsley M. F., Fractals Everywhere, Academic Press, 1993
- [3] Barreira L., Pesin Y. B., Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory, American Mathematical Society, Providence, 2001
- [4] Brin M., Stuck G., Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2002
- [5] Chiang H., Direct methods for stability analysis of electric power systems: theoretical foundation, BCU methodologies, and applications, John Wiley & Sons, 2011.
- [6] Christiansen F., Rugh, H. H. Computing Lyapunov spectra with continuous Gram - Schmidt orthonormalization, Nonlinearity, Vol 10, 1997
- [7] Douglas J. F., Gasiorek J. M., Swaffield J. A., Fluid Mechanics, Pitman Publishing Pty Ltd, Melbourne, 1979
- [8] Fox R. F., McDonald A. T., Introduction to fluid mechanics, John Wiley & Sons Inc, 1985
- [9] Hasselblatt B., Katok A., A first course in dynamics with a panorama of recent developments, Cambridge University Press, 2003
- [10] Grassberger P., Procaccia I, Measuring the strangeness of strange attractors, Physica D: nonlinear phenomena, Vol 9D, Nro 1&2, 1983
- [11] Guckenheimer J., Vladimirký A., A Fast Method for Approximating Invariant Manifolds, S. I. A. M. Journal of Applied Dynamical Systems. Vol 3, No 3, s. 232-260, 2004

- [12] Guckenheimer J., Holmes P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields, Springer-Verlag, Berlin, 1983
- [13] Lorenz E. N., Deterministic Nonperiodic Flow, Journal of the atmospheric sciences, Vol 20, March 1963
- [14] Lorenz E. N., On prevalence of aperiodicity in simple systems, Lecture Notes in Mathematics, 755, Springer-Verlag, 1979
- [15] Marsden J. E., McCracken M., The Hopf Bifurcation and Its Applications, Applied Mathematical Sciences, 19, Springer-Verlag, 1976
- [16] Nakayama Y., RF Boucher, Introduction to Fluid Mechanics, Arnold, 1999
- [17] Rayleigh L., On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid, when the Higher Temperature is on the Under Side, Philosophical Magazine and Journal of Science, Ser 6, Vol 32, Nro 192, 1916
- [18] Salmi T., Lujuusopin perusteet, Klingendahl Paino Oy, Tampere 2007
- [19] Saltzman B., Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I, Journal of the atmospheric sciences, Vol 19, July 1962
- [20] Sparrow C., The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors, Springer-Verlag, 1982
- [21] Williams R. F., Structure of Lorewnz Attractors, Publications Mathematiques, I. H. E. S., 50, 1980